

電磁気学

sikino *

March 8, 2021

Contents

1	ガウス求積法の導出	2
2	点数と次数の関係	2
2.1	具体的な分点の位置	3
2.2	具体的な分点の重み	5
3	まとめ	9

*自分のための電磁気学まとめです. かなり途中を端折っていますので, 突っ込みどころ満載だと思います. <https://slpr.sakura.ne.jp/qp/>

1 ガウス求積法の導出

導出は以下の順番で行う。

1. M 個の離散的な点を用いて N 次多項式を厳密に積分できるとき、 N と M の関係を調べる。
2. 具体的に、 M 点の位置と重みを調べる。

ガウス求積法を利用する方は、1. が分かればよいと思う。ガウス求積法を研究する方は、2. まで分かればよいと思う

2 点数と次数の関係

N 次多項式を有限区間 $[-1, 1]$ で、 M 個の点を用いて数値的に厳密に積分したい。つまり、関数 $f(x)$ が n 個の既知の係数 a_n を用いて

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \quad (1)$$

と掛けている場合に、積分

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \quad (2)$$

を考えたい。この積分を離散的な点だけを用いて計算したい。つまり、適当な M 個の点を用いて

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^M f(x_i) \omega_i \quad (3)$$

となるような x_i, ω_i の組み合わせを求めることが目標である。

まず、Eq. (3) の左辺を積分すると、

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^N a_n x^n dx \quad (4)$$

$$= \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \right) \quad (5)$$

である。

Eq. (3) の右辺を計算すると、

$$\sum_{i=1}^M f(x_i)\omega_i = \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^N a_n x_i^n \omega_i \quad (6)$$

$$= \sum_{n=0}^N a_n \left(\sum_{i=1}^M \omega_i x_i^n \right) \quad (7)$$

と書ける。ここで、 ω_i は重みであり、適当な係数である。もしも、任意の a_n について Eq. (3) の右辺と左辺が厳密に一致するならば、 $n = 0, 1, \dots, N$ について、

$$\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{i=1}^M \omega_i x_i^n, \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (8)$$

が成立する。この式は $N + 1$ 個の方程式である。今、右辺の未知の係数は $\omega_i, x_i, (i = 1, \dots, M)$ なので、右辺の自由度は $2M$ 個である。つまり、両辺を一致させるような係数の組み合わせがあるならば、

$$N + 1 \leq 2M \quad \rightarrow \quad N \leq 2M - 1 \quad (9)$$

である必要がある。よって、最小の組み合わせであるならば上式の等号が成立する。できるだけ少ない点数で計算したいので、等しい場合を採用して

$$N = 2M - 1 \quad (10)$$

である。つまり、 M 個の点を利用すれば $2M - 1$ 次の多項式を厳密に計算できる点の位置 x_i と w_i が存在する。

2.1 具体的な分点の位置

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \quad (11)$$

を求めるために、離散的な N 個の点 $x = x_i$ における $f(x)$ の値を利用する。つまり、

$$(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_N, f_N) \quad (12)$$

の点が既知とする。ここで、 $f_i \equiv f(x_i)$ と定義した（この時点でまだ x_i は決まっていない）。新たな関数 $F(x)$ を定義する。 $F(x)$ は、Eq. (12) の N 個の点を全て通る $N - 1$ 次多項式であり、一意に決まる。具体的には、ラグランジュ多項式を用いて

$$F(x) = \sum_{k=1}^N f_k \left(\prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) \quad (13)$$

と書ける。ここで、更に $f(x)$ と $F(x)$ の差の関数 $g(x)$

$$g(x) \equiv f(x) - F(x) \quad (14)$$

を定義する。次数を確認しておくと、 $g(x), f(x)$ は $2N - 1$ 次、 $F(x)$ は $N - 1$ 次多項式である。ここで、 $f(x_i) = F(x_i)$, (for all i) なので、 $g(x)$ は

$$g(x_1) = g(x_2) = \cdots = g(x_N) = 0 \quad (15)$$

の性質を持つ。積分を考えると

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 F(x) dx \quad (16)$$

であり、 $F(x)$ を離散的に表すと、

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^N F(x_i) \omega_i \quad (17)$$

である。今、 $f(x)$ は $2N - 1$ 次であり、 $F(x)$ は N 個の点で表現されているので、前節の議論から Eq. (17) をゼロにするような (x_i, ω_i) の組み合わせが存在する。今、 $g(x)$ は Eq. (15) が分かっているので、 N 個の x_i について、

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) G(x) \quad (18)$$

と書き換えることができる。ここで、 $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)$ は N 次多項式であり、 $G(x)$ は $N - 1$ 次多項式である。つまり、

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) G(x) dx = 0 \quad (19)$$

を満たす N 個の $x = x_i$ を探すことができれば嬉しい。ここで、 $G(x)$ は $N - 1$ 次多項式なので、 $N - 1$ 次の legendre 多項式を用いた基底関数で展開可能であるので、

$$G(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j x^j = \sum_{j=0}^{N-1} a_j P_j(x) \quad (20)$$

と書くことができる。また、

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) \quad (21)$$

は N 次なので、 N 次多項式の関数で書くことができる。 N 次多項式として N 次 legendre 多項式 $P_N(x)$ を選ぶことにする。単に N 次であるだけだと、 N 次以下の全ての legendre

多項式の和で書かなければならないが、点 x_1, x_2, \dots, x_N を $P_N(x) = 0$ を満たす N 個の点を選ぶとする。このようにすると、 N 次だけの legendre 多項式だけで書くことができ、

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) = cP_N(x) \quad (22)$$

とする定数 c を見つけられる¹。

Eq. (19) に Eq. (20), Eq. (22) を代入すると

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 cP_N(x) \sum_{j=0}^{N-1} a_j P_j(x) dx \quad (23)$$

$$= c \sum_{j=0}^{N-1} a_j \int_{-1}^1 P_N(x) P_j(x) dx \quad (24)$$

$$= \frac{2}{2N+1} c \sum_{j=0}^{N-1} a_j \delta_{N,j} \quad (25)$$

$$= 0 \quad (26)$$

となる。これはつまり、 N 次 legendre 多項式のゼロ点を求積法におけるゼロ点として選ぶと

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^N F(x_i) \omega_i = 0 \quad (27)$$

を満たすようにできるということである。

ここまでの議論で、分点の位置 x_i が求まった。残るは重み ω_i を決めることである。

2.2 具体的な分点の重み

前節までの議論から、 $2N - 1$ 次の多項式で記述される $f(x)$ の積分は、 N 個の点を用いて

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^N f(x_i) \omega_i \quad (28)$$

を厳密に積分する分点の位置と重み x_i, ω_i の組があることを示し、分点の位置 x_i は、 N 次 legendre 多項式のゼロ点、すなわち

$$P_N(x) = 0 \quad (29)$$

¹ これからの議論において、定数 c を具体的に決める必要はないが決めたい場合

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) = \frac{2^N (N!)^2}{(2N)!} P_N(x)$$

の関係から決まる。 https://coast.nd.edu/jjwteach/www/www/30125/pdfnotes/lecture16_19v17.pdf

を満たす N 個のゼロ点であることが分かった。次は重みを決める。Eq. (16) より $2N-1$ 次の $f(x)$ を N 次の legendre 多項式のゼロ点を通る多項式の積分に置き換えることができる。Eq. (13) を用いて

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 F(x)dx \quad (30)$$

$$= \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^N f_k \left(\prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) dx \quad (31)$$

$$= \sum_{k=1}^N f_k \int_{-1}^1 \left(\prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) dx \quad (32)$$

$$= \sum_{k=1}^N f_k \omega_k \quad (33)$$

である。つまり、重みは

$$\omega_k = \int_{-1}^1 \left(\prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) dx \quad (34)$$

であるので、これを求めることが問題となる。Eq. (22) から、

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) = cP_N(x) \quad (35)$$

分かっている。 k 番目の式についてまとめると、

$$\prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N (x - x_i) = \frac{cP_N(x)}{x - x_k} \quad (36)$$

また、Eq. (35) の両辺を微分すると

$$cP'_N(x) = \frac{\partial}{\partial x} [(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)] \quad (37)$$

$$= \left[(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_N) + \right. \\ \left. (x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_N) + \right. \\ \left. (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{N-1}) \right] \quad (38)$$

$$= \sum_{j=1}^N \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^N (x - x_i) \quad (39)$$

と求められる。特に、 $x = x_k$ ならば、

$$cP'_N(x_k) = \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N (x_k - x_i) \quad (40)$$

Eq. (36) と Eq. (40) を組み合わせると、

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{cP_N(x)}{x - x_k} \cdot \frac{1}{cP'_N(x_k)} \quad (41)$$

$$= \frac{P_N(x)}{(x - x_k)P'_N(x_k)} \quad (42)$$

なので、重み ω_k は

$$\omega_k = \int_{-1}^1 \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) dx \quad (43)$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{P_N(x)}{(x - x_k)P'_N(x_k)} dx \quad (44)$$

となる。この積分を計算するために多項式の性質を用いて計算を進める。右辺の形は、クリストッフエル＝ダルブーの定理から導けそうな形であることを当たりをつけて計算する²。

直交多項式 (Legendre 多項式や Laguerre 多項式など) にはクリストッフエル＝ダルブーの定理 (Christoffel—Darboux theorem) がある。それは、 n 次の直交多項式を $p_n(x)$ と書くとき、 $p_n(x)$ には

$$\sum_{j=0}^N \frac{p_j(x)p_j(y)}{h_j} = \frac{k_N}{h_N k_{N+1}} \frac{p_{N+1}(x)p_N(y) - p_N(x)p_{N+1}(y)}{x - y} \quad (45)$$

という性質である。ここで、 k_n は、直交多項式 $p_n(x)$ の x^n の係数で、

$$p_n(x) = k_n x^n + \dots \quad (46)$$

で表されるとき係数である。これを求めてみる。求めるために、legendre 多項式の性質の一つである三項漸化式

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (47)$$

を用いる。 x の次数で両辺を比較すると

$$(n + 1)[k_{n+1}x^{n+1} + \dots] = (2n + 1)[xk_n x^n + \dots] \quad (48)$$

なので、次数を比較すれば最高次の係数について

$$(n + 1)k_{n+1} = (2n + 1)k_n \quad (49)$$

²我々凡人には思い付きませんよ。天下りの的に使います。導けるからそれで良いです

の関係がある。よって、

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{2n+1}{n+1} \quad (50)$$

を得る。

また、 h_N は直交性から導かれる係数で、

$$\int_{-1}^1 p_n(x)p_m(x)w(x)dx = h_n\delta_{nm} \quad (51)$$

を満たす。legendre 多項式の場合、 $w(x) = 1$ であり、 $h_n = \frac{2}{2n+1}$ である。

重みの計算に使いたいため、 $N \rightarrow N-1$ に置き換え、legendre 多項式の場合に適用、さらに $y = x_k$ の場合にクリストッフエル=ダルブーの定理は、

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{P_j(x)P_j(x_k)}{h_j} = \frac{k_{N-1}}{h_{N-1}k_N} \frac{P_N(x)P_{N-1}(x_k) - P_{N-1}(x)P_N(x_k)}{x - x_k} \quad (52)$$

$$= \frac{2N-1}{2} \cdot \frac{N}{2N-1} \cdot \frac{P_N(x)P_{N-1}(x_k)}{x - x_k} \quad (53)$$

$$= \frac{NP_{N-1}(x_k)P_N(x)}{2(x - x_k)} \quad (54)$$

より、

$$\frac{P_N(x)}{x - x_k} = \frac{2}{NP_{N-1}(x_k)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{P_j(x)P_j(x_k)}{h_j} \quad (55)$$

$$= \frac{1}{NP_{N-1}(x_k)} \sum_{j=0}^{N-1} P_j(x)P_j(x_k)(2j+1) \quad (56)$$

を得る。ここで $P_N(x_k) = 0$ を利用した。

Eq. (43) に Eq. (56) を代入して、

$$\omega_k = \int_{-1}^1 \frac{P_N(x)}{(x - x_k)P'_N(x_k)} dx \quad (57)$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{NP_{N-1}(x_k)} \sum_{j=0}^{N-1} (2j+1)P_j(x)P_j(x_k) \frac{1}{P'_N(x_k)} dx \quad (58)$$

$$= \frac{1}{NP_{N-1}(x_k)P'_N(x_k)} \sum_{j=0}^{N-1} (2j+1)P_j(x_k) \cdot \int_{-1}^1 P_j(x) dx \quad (59)$$

$$= \frac{1}{NP_{N-1}(x_k)P'_N(x_k)} \sum_{j=0}^{N-1} (2j+1)P_j(x_k) \cdot 2\delta_{j,0} \quad (60)$$

$$= \frac{2}{NP_{N-1}(x_k)P'_N(x_k)} \quad (61)$$

となる。 $P_n(x)$ の微分は次数は一つ下がるので、 $P_{n-1}(x)$ と同じ次数になり、何か関係がありそうであるので頑張って見つけてみる。そこで微分に関する三項漸化式

$$(1-x^2)P'_n(x) = -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x) \quad (62)$$

を用いる。特に $n = N$, $x = x_k$ の場合、

$$(1-x_k^2)P'_N(x_k) = -Nx_kP_N(x_k) + NP_{N-1}(x_k) \quad (63)$$

$$\rightarrow NP_{N-1}(x_k) = (1-x_k^2)P'_N(x_k) \quad (64)$$

の関係があるので、代入すると

$$\omega_k = \frac{2}{NP_{N-1}(x_k)P'_N(x_k)} \quad (65)$$

$$= \frac{2}{(1-x_k^2)[P'_N(x_k)]^2} \quad (66)$$

$$= \frac{2(1-x_k^2)}{[NP_{N-1}(x_k)]^2} \quad (67)$$

とまとめられる。

3 まとめ

$2N-1$ 次以下の多項式 $f(x)$ の積分を、 N 個の点だけを用いて厳密に計算できる。つまり、

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^N f(x_i)\omega_i \quad (68)$$

を計算する点の位置 x_i と w_i が存在し、 x_i, ω_i は

$$P_N(x) = 0 \rightarrow x = x_i, \quad (69)$$

$$\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_N(x_i)]^2} \quad (70)$$

から求めることができる。ここで、 $P_n(x)$ は n 次ルジャンドル多項式である。