

電磁気学

sikino *

February 14, 2021

Contents

1 静電場・静磁場	2
1.1 静電場と力	2
1.2 静電場の性質	3
1.3 積分形, 微分形の導出	3
1.3.1 発散について	3
1.3.2 回転について	4
1.4 静磁場と力	6
1.5 静磁場の性質	8
1.6 積分形, 微分形の導出	8
1.6.1 発散について	8
1.6.2 回転について	8
2 時間依存する電場・磁場	10
3 誘電体中の電場・磁場	12
3.1 誘電体中の電場 [1](p. 85)	12
3.2 誘電体中の磁場	14
3.3 時間依存する誘電体中の電場・磁場	15
3.4 誘電体中の微分形マクスウェル方程式	16
A 電場と電気双極子の方向	17
B 点電荷に対する運動方程式	18

*自分のための電磁気学まとめです. かなり途中を端折っていますので, 突っ込みどころ満載だと思います. <https://slpr.sakura.ne.jp/qp/>

1 静電場・静磁場

1.1 静電場と力

位置 \mathbf{r}_1 にある電荷 q_1 が, 位置 \mathbf{r} に作る電場 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ は,

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (1)$$

である. ここで, π は円周率, $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{A}^2\text{s}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ は真空の誘電率である.

電場 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ 中に, 位置 \mathbf{r}_0 にある電荷 q_0 に生じる力 \mathbf{F}_1 は,

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_0) = q_0\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_0) \quad (2)$$

と書ける. Eq. (2) の力は保存力なので, ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ が存在する¹. つまり電場は, あるスカラー関数 $\phi(\mathbf{r})$ の傾きとして表現することができ,

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_1(\mathbf{r}) \quad (3)$$

として書ける. 電氣的なポテンシャルによる $\phi(\mathbf{r})$ は静電ポテンシャル (電位) と呼ばれる. また, 古典力学における位置エネルギーと同じように, 位置 \mathbf{r}_0 にある電荷 q_0 の電氣的な位置エネルギー (静電エネルギー) $U_1(\mathbf{r}_0)$ は,

$$U_1(\mathbf{r}_0) = q_0\phi_1(\mathbf{r}_0) \quad (4)$$

と書ける. つまり Eq. (2) は, 電位や静電エネルギーを用いて

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}_0) = q_0\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_0) \quad (5a)$$

$$= -q_0\nabla\phi_1(\mathbf{r}_0) \quad (5b)$$

$$= -\nabla U_1(\mathbf{r}_0) \quad (5c)$$

と書ける.

具体的に, Eq. (1) について, 電場 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ を作り出す電位 $\phi_1(\mathbf{r})$ は

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + C \quad (6)$$

と求められる. ここで C は定数であり, 通常 $\phi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = 0$ になるように $C = 0$ と決める.

¹例えば電場中の点電荷の軌跡を知りたい場合, ニュートンの運動方程式を解く必要があるが, 力さえわかればよく, 力は Eq. (2) で与えられているのでポテンシャルなどを考える必要はない. しかし, ポテンシャルをわざわざ利用する利点は, ベクトル関数だった力がスカラー関数として書き直せる点にある. 元々 Eq. (2) は, 位置 \mathbf{r} で表される点で, ベクトル関数 \mathbf{F} を求める式になっている. ポテンシャルを定義することで, 位置 \mathbf{r} で表される点で, スカラー関数 ϕ を知るだけで良く, 情報が圧縮される=本質を見抜きやすくなる, という利点がある. 保存力は力のする仕事経路に寄らないことを意味する

1.2 静電場の性質

静電場の性質は以下の形でまとめられる².

【積分形】

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (7a)$$

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad (7b)$$

【微分形】

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (8a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (8b)$$

閉曲面 S の位置 \mathbf{r} における法線ベクトルを $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, その大きさは $|\mathbf{n}(\mathbf{r})| = 1$.

閉曲線 C の位置 \mathbf{r} における曲線に沿うベクトルを $\mathbf{t}(\mathbf{r})$, その大きさは $|\mathbf{t}(\mathbf{r})| = 1$.

$\rho(\mathbf{r})[\text{C}/\text{m}^3]$ は位置 \mathbf{r} における電荷密度.

ここで, Eq. (7a) の左辺は電場の湧きだしを示している. Eq. (7b) の左辺は静電場に渦が生じないことを表す³.

1.3 積分形, 微分形の導出

導出に当たっては, 簡単にするために一般的な話で導出するのではなく, 簡単に計算できる具体例を一つ考えて十分とする. より詳細な説明は適当な参考書を参考にすること.

1.3.1 発散について

電荷 q が原点に存在して, 半径 l の球で電荷を取り囲むような面 S を考える. この時, 電場の方向は球面に垂直な方向を向くので, その方向を $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ と表現する. 今, 原点を中心に等方的なので, 面 S 上における電場は, Eq. (1) より

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{l^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r})}{l^2} \quad (9)$$

と書ける. ここで, 両辺に $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ を掛け, 面 S で積分すると

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l^2} \oint_S \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \quad (10a)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l^2} 4\pi l^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (10b)$$

²ここで説明しているのは”電場”の性質であって, それを超える電場によって生じる力など, ここでは $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ については何一つ言っておらず, 導出はできない. オームの法則も導くことはできない.

³静電場について渦が生じないのであって, 時間依存する電場では渦は生じて良い

となり、この量は半径 l に依らないことが分かる。証明は省くが、これは球ではなく任意の面で囲んだとしても成立する。Eq. (10b) が示す意味は、電場を閉曲面で積分するとその閉曲面内にある電荷の量に比例した量が計算できるということである⁴。

さらに電荷 q に空間的な広がりがある場合、電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ を用いて

$$q = \int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (11)$$

と書くのは自然なので、

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (12)$$

とも書ける。これが静電場に対する積分形のガウスの法則である。更に、ガウスの定理よりベクトル場である電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ について

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (13)$$

が成立するので、Eq. (12) と比較して

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} d\mathbf{r} \quad (14)$$

である。よって任意の場所で

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (15)$$

が成り立つ。これが静電場に対する微分形のガウスの法則である。

1.3.2 回転について

電場がスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ で書かれている場合、ベクトルの性質から

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto \nabla \times \nabla \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (16)$$

が自動的に成り立つ。これが静電場に対する微分形のストークスの定理である。また、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (17)$$

を満たす関数について、経路 C に沿った線積分

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (18)$$

⁴例えば正、負の電荷が 10, 4 ある場合、+6 という量が計算できるのであって、個別の量が分かるわけではない点に注意。ただし、十分に小さい閉曲面を選択すれば、例えば電子の大きさ程度に小さい領域で囲めばこのようなことはほとんど起こらず、電荷単体で考えられる

の値は, 始点と終点のみによって決まる量となる. つまり始点と終点一致するならば, Eq. (18) の値はゼロである. 更に, 閉じた閉曲線に対してストークスの定理より

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) dS \quad (19)$$

が成立するので

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad (20)$$

が成立する. これが静電場に対する積分形のストークスの定理である.

1.4 静磁場と力

位置 \mathbf{r}' にある電流素片 $I(\mathbf{r}')\Delta\mathbf{r}'$ が,⁵ 位置 \mathbf{r} に作る微小磁場 $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は,

$$\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu_0 I(\mathbf{r}')\Delta\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (21)$$

と書ける. ここで, $\mu_0 = 1.256\ 637\ 062\ 12(19) \times 10^{-6} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$ は磁気定数と呼ばれ⁶, はある領域に渡って電流が存在する場合, 位置 \mathbf{r} に作る磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (22)$$

である. \mathbf{B} は $\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ の単位を持ち, 磁場または磁束密度とも呼ばれる. または, ウェーバー Wb

$$1\text{Wb} = 1\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m} \quad (23)$$

を定義して, $\mathbf{B}[\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}]$ が用いられる⁷.

ここで, $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ は位置 \mathbf{r} における電流密度ベクトル (単位は $[\text{A} \cdot \text{m}^{-3}]$) を表す.

外部の磁場 \mathbf{B} が存在している時に, 位置 \mathbf{r} にある電流素片 $I(\mathbf{r})\Delta\mathbf{r}$ に生じる力 $\Delta\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は,

$$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r})\Delta\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (24)$$

と書ける. もし電流素片が閉じた回路であり, 電流密度ベクトル $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ で表現されているのであれば, その閉じた回路に働く力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = \oint \mathbf{i}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (25)$$

である. 積分の経路は電流密度に沿った経路である.

磁場はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の回転として書き表すことができる⁸. つまり,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (26)$$

⁵電流素片は実在しない. あたかも電流素片として考えられる例は, 点電荷が運動している場合である.

⁶磁気定数は真空の透磁率とも呼ばれるが, 透磁率とは磁性体がある場合に使われる言葉であり, 真空に対しては用いない. しかし慣例的に呼ばれる. また, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$ という場合もあるが, これは定義変更に伴って 2021 年現在使われていない.

⁷磁束密度とは, 単位 Wb を持つ磁束 $\Phi = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS$ の単位面積当たりの量である.

⁸静電場の時と違い, 静磁場がスカラー関数として表現されるわけではなく, 変数の数が減るわけではない. しかし磁場をこの形で書くことにより, ベクトル解析で導かれる磁場の発散がゼロ ($\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$) であることが自動的に満たされるので, 都合が良い表現になる. ベクトルポテンシャルは単なる数学的テクニックではなく, 本当に物理的に存在する. 詳細は適当な参考書を参照のこと.

と書け, 具体的な形は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{A}'(\mathbf{r}). \quad (27)$$

である. ここで, $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ は

$$\nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0 \quad (28)$$

を満たす任意のベクトルである. つまり, Eq. (28) さえ満たす $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ ならば何でもよく, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は同じ $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を与える. 無数に存在する $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の中で, よく選ばれるのは,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (29)$$

を満たすように $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ を選ぶ (Lorentz ゲージ) 選び方である. このように選ぶとマクスウェル方程式から導かれる \mathbf{A} に対する微分方程式が簡単になる.

1.5 静磁場の性質

静磁場の性質は以下の形でまとめられる⁹.

【積分形】

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad (30a)$$

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (30b)$$

【微分形】

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (31a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}) \quad (31b)$$

閉曲面 S の位置 \mathbf{r} における法線ベクトルを $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, その大きさを $|\mathbf{n}(\mathbf{r})| = 1$.

閉曲線 C の位置 \mathbf{r} における曲線に沿うベクトルを $\mathbf{t}(\mathbf{r})$, その大きさを $|\mathbf{t}(\mathbf{r})| = 1$.

1.6 積分形, 微分形の導出

1.6.1 発散について

磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ がベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の回転でかけている場合, ベクトル解析より

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (32)$$

なので

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (33)$$

が自動的に満たされる. 積分形については静電場の時と同じように求められる.

1.6.2 回転について

磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ の回転を考える. $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ がベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の回転でかけている場合,

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \quad (34a)$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (34b)$$

$$= \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}) \quad (34c)$$

⁹電場の時と同様, ここで説明しているのは”磁場”の性質であって, それを超える磁場によって生じるローレンツ力など (例えば $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) については何一つ言っておらず, 導出はできない.

が成立する. ここで, Eq. (34a) から Eq. (34b) はベクトル解析から得られる式を, Eq. (34b) から Eq. (34c) にかけて Eq. (27) の回転をとることで導かれる. 詳しくは [1] の p. 163 を参照. 積分形については静電場の時と同じように求められる.

2 時間依存する電場・磁場

時間依存する電場や磁場の性質は、以下の形でまとめられる。

積分形マクスウェル

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (35a)$$

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (35b)$$

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad (35c)$$

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left[\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (35d)$$

微分形マクスウェル

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (36a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (36b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (36c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left[\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \quad (36d)$$

ここで、Eq. (35b), Eq. (36b) の右辺はファラデーの誘導法則であり、実験的な事実から導出された¹⁰。また、Eq. (35d), Eq. (36d) は Eq. (35c), Eq. (36c) を前提とした場合に¹¹、一般の電流が満たすべき保存則

$$\nabla \cdot \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (37)$$

との矛盾を解決するために、マクスウェルによって付け加えられた。ここで Eq. (36d) は Eq. (36a) を用いて、Eq. (37) から $\rho(\mathbf{r}, t)$ を消去することで導出できる。

¹⁰右辺がゼロではないことは起電力（単位はボルト）の存在を示しており、電場が静電ポテンシャルだけで書けず、磁場の時間変化により、電場に渦が生じることを意味している。

¹¹つまり、時間変化しても単位磁化が現れるわけではないことが強い前提として存在している。

時間依存する場合に, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ をスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ で表すことを考える. すると,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (38)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (39)$$

と表される. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ を与える $\phi(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ は無数に存在するが, 特にローレンツゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (40)$$

を満たすように $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_L(\mathbf{r}, t), \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t)$ を選ぶと, それぞれは

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (41)$$

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi_L(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (42)$$

の方程式を満たす (ローレンツゲージではない場合, この微分方程式はもう少し複雑になる). ちなみに, 光速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad (43)$$

と書ける.

ローレンツゲージという制限を加えてもまだ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ の選び方に自由度が存在する. つまり, 任意のスカラー関数 $\chi_0(\mathbf{r}, t)$ を用いて変換

$$\mathbf{A}'_L(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi_0(\mathbf{r}, t) \quad (44)$$

$$\phi'_L(\mathbf{r}, t) = \phi_L(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi_0(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (45)$$

を行っても $\mathbf{A}'_L(\mathbf{r}, t), \phi'_L(\mathbf{r}, t)$ に対しても Eq. (40), Eq. (41), Eq. (42) と同じ形の微分方程式, 条件を満たす.

3 誘電体中の電場・磁場

3.1 誘電体中の電場 [1](p. 85)

電荷 $+Q$ を持つ導体が誘電体中に置かれている場合を考える. 導体を囲むように面 S_1 を設定し, 電荷がゼロの時と比較して, 電荷が存在したときに面 S_1 上を通過する全正電荷の量を考える. 位置 \mathbf{r} において単位面積を通過する正電荷の大きさと方向を $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ と書けば,

$$\int_{S_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_1 dS \quad (46)$$

である. ここで, $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ は分極ベクトルと呼ばれる¹². 空間内から突然電荷が消えることがないので, 異なる面 S_2 を考えたとしても積分の値は同じである. すなわち,

$$\int_{S_1} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_{S_2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad (47)$$

が成立する. 結局, 誘電体を考えると空間では, 導体の中心からの距離 r を考えたときに $r \rightarrow \infty$ に正電荷, $r \rightarrow$ (導体の表面) に負電荷が集まる事になる. その他の中間の領域では, 正の電荷と負の電荷の通過する量が同じであり, 面を貫く電荷量は同じなのでちょうどキャンセルされる. $r \rightarrow \infty$ に集まる正電荷の導体に対する影響は無いため, 無視できる.

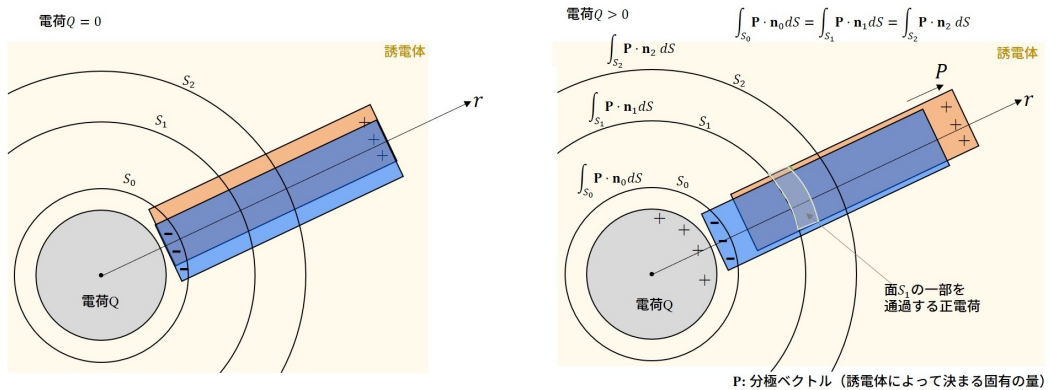


Figure 1: 誘電体

結果として, 正に帯電した導体の周りに負の電荷が集まっただけに見え, 誘電体がある場合に導体外部に作る電場は, 真空の場合と比べて小さくなる. これは, コンデンサの間に, ある定電圧 V を掛けた時に, 誘電体を入れることで, 静電容量が増大することを説明する¹³.

¹²分極ベクトルの次元や意味については, Eq. (49) を確認すると理解の助けになるかもしれない.

¹³誘電体の有り無しで同じ電圧が書かれた時に, より多くのエネルギーが蓄えられるため

帯電体を囲む閉曲面 S 上にガウスの法則を適応すると

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(Q - \int_S \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \quad (48)$$

である。ここで、 Q は真空の時の帯電体に帯電した電荷である。書き換えると

$$\int_S (\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = Q \quad (49)$$

となり、

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (50)$$

と書くと $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ は、真空中の $\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$ と同じ役割を果たす。

実験によると

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (51)$$

が多くの物質で成立する¹⁴。これを利用すると

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = (\varepsilon_0 + \chi_e) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (52)$$

と書け、 χ_e を電気感受率と呼ぶ。

つまり、真空中の時と比較して、誘電体がある時との差は誘電体の電気感受率 χ_e で特徴づけられる。

¹⁴ おそらく、 $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ が電場に依存するので、電場で級数展開して、 $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0 + \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dots$ と書ける。弱電場極限では $\chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r})$ のみ考慮すればよいから、比例すると言っていると考える。つまり、誘電体中の微視的な分子分極が揃いきってしまい、飽和することがない線形領域だけを考えている、ということである。さらに推測であるが、誘電体に対して現実的な電場の大きさが弱電場なのだから比例する項だけで十分特徴づけられるのだと思われる。

3.2 誘電体中の磁場

真空中に電流 $\mathbf{i}_e(\mathbf{r})$ と磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ の関係式である時間変化しないアンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}_e(\mathbf{r}) \quad (53)$$

を考える。誘電体が存在する場合、誘電体に電流 $\mathbf{i}_m(\mathbf{r})$ が誘起されるので、

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 (\mathbf{i}_e(\mathbf{r}) + \mathbf{i}_m(\mathbf{r})) \quad (54)$$

と書ける。誘電体に生じている電流によって、誘電体中の磁場成分が誘起される。誘電体中の磁場成分の向きは平均的に誘起されるので、誘電体の磁気双極子モーメント・ベクトルを巨視的な領域で平均化し、その単位体積当たりの磁化ベクトル $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ を考える。その関係は、

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}_m(\mathbf{r}) \quad (55)$$

である。式変形すれば、

$$\nabla \times (\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r})) = \mu_0 \mathbf{i}_e(\mathbf{r}) \quad (56)$$

であり、

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{i}_e(\mathbf{r}) \quad (57)$$

と変形できる。ここで、磁場の強さ $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ を

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r})] \quad (58)$$

で定義した。この定義に従えば、アンペールの法則は

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_e(\mathbf{r}) \quad (59)$$

と書ける。真空中では $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0$ なので、誘電体中でも真空中でも $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ が定義できる。電場の場合と同様に、実験的事実から弱磁場において $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ は外部磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ に比例するので、

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (60)$$

と、比例定数である磁化率 χ_m を用いて書くことができる。

3.3 時間依存する誘電体中の電場・磁場

今までの誘電体中の考察から, 誘電体中では, 以下の関係がある.

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (61a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r})] \quad (61b)$$

弱電場, 弱磁場の極限において \mathbf{P}, \mathbf{J} を \mathbf{E}, \mathbf{H} で展開すれば,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (62a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (62b)$$

と書ける (書くと約束する). ここで, χ_e, χ_m はそれぞれ電気感受率, 磁化率であり, 誘電体固有の量である. この量は, 基本的に行列だが, スカラー量として書く場合も多い. これは誘電体の構造に依存して決まる.

Eq. (61) に Eq. (62) を代入すれば,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (63a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (63b)$$

と書ける. ここで,

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0 + \chi_e \quad (64a)$$

$$\mu \equiv \mu_0 + \chi_m \quad (64b)$$

と置いた. 真空中では $\chi_e = \chi_m = 0$ である. つまり, 真空中のマクスウェル方程式を誘電体中のマクスウェル方程式に置きなおすためには, $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon, \mu_0 \rightarrow \mu$ とすればよいと想像できる. この関係式から導いたマクスウェル方程式を現象論的なマクスウェル方程式と呼ぶ.

3.4 誘電体中の微分形マクスウェル方程式

実際に誘電体中の微分形マクスウェル方程式は, $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ を用いて

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (65a)$$

$$\nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (65b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (65c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (65d)$$

と書ける. もしくは, \mathbf{E} , \mathbf{B} を用いて,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (66a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (66b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (66c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \left[\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \quad (66d)$$

としても良い.

真空中の場合と同様に, スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を用いると, 電場と磁場を書くことができる. つまり,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (67)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (68)$$

として決まる $\phi(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ が存在する. このように定義すると, Eq. (66b) と Eq. (66c) が自動的に満たされる. 細かい導出は省くが, $\phi(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ に対するマクスウェル方程式は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (69)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (70)$$

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) \right) = -\mu \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (71)$$

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_L(\mathbf{r}, t) \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (72)$$

$$\nabla \mathbf{A}_L(\mathbf{r}, t) + \varepsilon\mu \frac{\partial \phi_L(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (73)$$

となる. 真空中の時と同様, $\phi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ にはスカラー関数 $\chi(\mathbf{r}, t)$ に依る自由度が存在する.

A 電場と電気双極子の方向

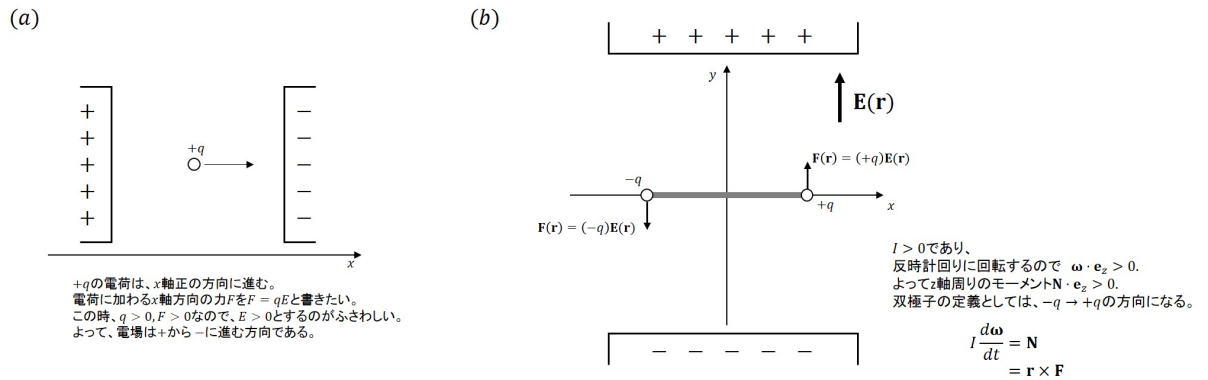


Figure 2: 電場の方向

電場は $+$ \rightarrow $-$, 電気双極子は $- \rightarrow +$ に向かう方向である. $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ を決めてから, 双極子について回転方向を考えながら双極子を決めると導ける.

B 点電荷に対する運動方程式

静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, 静磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ の中にある質量 m , 電荷 q を持つ点電荷に対する運動方程式

$$m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}(t)) + q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t)) \quad (74)$$

ここで, 点電荷の位置, 速度ベクトル $\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)$ と置いた.

1. 静電場による力

静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 中の, 位置 $\mathbf{r}(t)$ にある電荷 q を持つ点電荷に働く力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ は,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}(t)) \quad (75)$$

2. 静磁場による力

位置 $\mathbf{r}(t)$ にある電荷 q を持つ点電荷の電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ は,

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad (76)$$

と書ける. この点電荷が速度 $\mathbf{v}(t)$ で運動している場合, 電流密度 $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$ は

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(t) \quad (77)$$

$$= q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad (78)$$

である. ゆえに, 点電荷に働く力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t)$ は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t) = \int \mathbf{i}(\mathbf{r}', t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (79)$$

$$= q \int \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}(t)) d\mathbf{r}' \quad (80)$$

$$= q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t)) \quad (81)$$

である.

Reference

- [1] 砂川重信著『電磁気学』岩波書店, 第39刷