

信号と窓関数

シキノ *

December 4, 2022

Contents

1	まとめ	3
1.1	信号の分類	3
1.2	窓関数	4
1.3	単色信号とノイズを含む場合	4
2	信号	6
2.1	確定信号	7
2.1.1	エネルギーが有限の場合	7
2.1.2	エネルギーが無限の場合	8
2.1.3	(具体例) 単色光のパワースペクトル密度	8
2.2	不規則信号	10
2.2.1	白色雑音のパワースペクトル密度	12
2.2.2	白色雑音のパワースペクトル密度 (補足)	14
3	実測定する場合	16
3.1	エネルギーが無限の信号を有限の時間で切り出した場合	16
3.2	窓関数の規格化	18
3.2.1	信号のパワーが一致するように決める規格化	18
3.2.2	周波数 $f = f_a$ の信号についてのみ, パワースペクトル密度が矩形窓と一致するように決める	21
3.3	無限区間の信号と有限区間の信号の違い	24
3.4	複数の信号が存在する場合	25

*<https://slpr.sakura.ne.jp/qp/>, <https://twitter.com/sikinote>

4 離散化した場合の窓関数の影響	28
4.1 単色光, パワースペクトル密度で規格化	30
4.1.1 矩形窓の場合	31
4.1.2 矩形窓ではない場合	34
4.2 パワーで規格化し, 単色光について計算する場合	38
4.2.1 無限区間の場合の解	38
4.2.2 矩形窓の場合	38
4.2.3 矩形窓ではない場合	39
4.3 ノイズを含む信号のパワースペクトル密度	42
A パーセバルの定理の証明	49
B フーリエ変換・離散フーリエ変換の定義	50
C プログラム	51

1 まとめ

1.1 信号の分類

本稿の”信号”とは、確定信号と不規則信号のことを示し、table (2) のように分類・定義されます。

Table 1: 信号の分類

信号の分類		確定信号		不規則信号
		非周期信号	周期信号	非周期信号
周期性	エネルギー	有限	無限	無限
エネルギー	E	$\int_{-\infty}^{\infty} S(f)df < \infty$	∞	
エネルギースペクトル密度	$S_x(f)$	$ x(f) ^2$	—	
自己相関関数 (エネルギー)	$R_x(\tau)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$	—	
パワー	P	—	$\int_{-\infty}^{\infty} S(f)df < \infty$	
パワースペクトル密度	$S(f)$	—	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ x_T(f) ^2}{T}$	
自己相関関数 (パワー)	$R(\tau)$	—	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt$	

不規則信号の場合、 $x(t)$ は見本関数を表します。

本稿で扱う不規則信号 $x(t)$ は弱エルゴード性を持つと仮定します。弱エルゴード性を持つ信号とは以下の性質を持つ信号を指します。

(a) 広義定常性を持つこと (弱定常信号であること)

- 期待値が時間に依存せず、一定値であること

期待値 $\langle x \rangle$ は時刻によって変わらないことを仮定します。

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;t)dx \quad (1.1)$$

- 分散が有限であること

分散 $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ が有限の値になることを仮定します。

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x;t)dx \quad (1.2)$$

- 自己相関関数が時間差のみによって決まる関数となること

いかなる時間の切り出しにおいてもその統計的な性質が変わらないことを仮定します。

(b) 弱エルゴード的である

• 期待値 $\langle x \rangle$ と平均値 \bar{x} が等しい

期待値 $\langle x \rangle$ と平均値 \bar{x} の両者が等しいことを言います.

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1.3)$$

1.2 窓関数

窓関数は、有限の時間で信号を切り出す際に使用されます。窓関数を使うことによって、信号の周期境界条件が満たされない事による信号のスペクトルへの影響を、ある程度軽減することができます。しかし窓関数を使うことによって、本来の信号を歪めてしまい、本来出現しないはずのスペクトルを出現させてしまう欠点があります。

幅 T を持つ窓関数 $w(t)$ (またはそのフーリエ変換 $w(f)$) は、目的に応じて主に以下の2種類の規格化が実施されます。

1. パワーによる規格化 (基準は無限に続く単色の周期信号の結果)

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |w(f)|^2 df = 1 \quad \text{or} \quad \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt = 1 \quad (1.4)$$

2. パワースペクトル密度による規格化 (基準は単色の周期信号に矩形窓を作用させた結果)

$$\frac{1}{T} w(f=0) = 1 \quad \text{or} \quad \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 1 \quad (1.5)$$

1.3 単色信号とノイズを含む場合

信号 $x(t)$ が単色信号 $x_A(t)$ と分散 σ を持つノイズ $n(\sigma, t)$ からなることを考えます。つまり

$$x(t) = x_A(t) + n(\sigma, t) \quad (1.6)$$

で書けるとします。 $t = t_c$ 周りで切り出すために窓関数 $w(t)$ を掛けた信号 $x(t_c, t)$ を

$$x(t_c, t) = [x_A(t) + n(\sigma, t)]w(t - t_c) \quad (1.7)$$

と書き、これを対象とします。簡単に考えるために、矩形窓 $w(t) = 1(|t| < T/2), 0(|t| > T/2)$ の場合を特に考えます。離散化した場合の自己相関関数 $R_d(t_c, \tau)$, パワースペクトル

密度 $S_d(t_c, f_n)$, 周波数幅に含まれるパワー $P_d(t_c, f_n)$, パワー $P(t_c)$ は以下のように求められます.

$$R_d(t_c, \tau) = |x_A|^2 e^{j2\pi f_A \tau} + N\sigma^2 \delta_{\tau,0} \quad (1.8a)$$

$$S_d(t_c, f_n) = N|x_A|^2 \delta_{n,A} + \sigma^2 \quad (1.8b)$$

$$P_d(t_c, f_n) = |x_A|^2 \delta_{n,A} + (\sigma^2 \Delta t) \cdot \Delta f \quad (1.8c)$$

$$P(t_c) = |x_A|^2 + \sigma^2 \quad (1.8d)$$

説明や記号の意味が不十分な場合, 節 4.3 を参照ください.

2 信号

ある信号 x が時刻 t の関数 $x(t)$ として書かれるとき, そのエネルギー E を

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.1)$$

として定義します. E の単位は例えばジュール [J] の単位を持ち, 信号 $x(t)$ は例えば電圧波や電流波などを指します¹.

信号は確定信号と不規則信号で分類することができます. 確定信号とは, 数学的な関数を用いて表現することができる信号であり, 更に周期信号と非周期信号に分けることができます.

また, 不規則信号は波形が単なる一例としてのみ与えられる信号で, 例えばホワイトノイズ (熱雑音) が不規則信号の一つに挙げられます.

Table 2: 信号の分類

信号	周期性	エネルギー E	波の例
確定信号	周期信号	無限	単色信号 (continuous wave)
	非周期信号	無限 or 有限	ガウシアン波束
不規則信号	非周期信号	無限	熱雑音

エネルギーが無限 (発散) の信号の場合, Eq. (2.1) を用いて信号のエネルギーを定義すると単に "無限" という答えしか出てこなく, つまらないものになります. この発散が生じる原因は, 時間の積分区間が無限であることです. そのため, エネルギーが無限の信号を意味のある量として定義するためには「単位時間当たりのエネルギー」, すなわちパワー (例えばワット [J/s]) で考えると意味がある量になることが分かります. この定義からわかるように, 有限区間の信号の定義 Eq. (2.1) と異なることに注意してください.

¹ $x(t)$ として電圧波 $v(t)$ を考えたい場合, $|x(t)|^2 = |v(t)|^2/Z$ となるようにしなければならず, インピーダンス Z が関係してきます. もしくは, 規格化された信号 $x(t) = v(t)/\sqrt{Z}$ として考える必要があります.

2.1 確定信号

2.1.1 エネルギーが有限の場合

まずエネルギーが有限の確定信号 $x(t)$ の場合を考えます. 信号 $x(t)$ のエネルギー E は次のどちらかの表現で書くことができます.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.2a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df \quad (2.2b)$$

ここで, $S_x(f) = |x(f)|^2$ であり, エネルギースペクトル密度 (単位 [J/Hz]) と呼ばれています. そして $x(f)$ は $x(t)$ のフーリエ変換

$$\begin{cases} x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f)e^{i2\pi ft} df \end{cases} \quad (2.3a)$$

$$(2.3b)$$

で与えられます. また Eq. (2.2a) と Eq. (2.2b) の関係はパーセバルの定理として知られています (導出は Appendix A を参照してください).

Eq. (2.2b) の表現は, 信号のエネルギーを周波数毎に分解して表現していると捉えることができます.

有限の信号の場合, ここまでで信号のパワーを表現することができますが, エネルギーが無限の場合に対する対応として, 自己相関関数を用いたエネルギーの表現を示しておきます.

自己相関関数 $R_x(\tau)$ は,

$$R_x(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (2.4)$$

のように定義されます ([3],[4] ほか). この自己相関関数をフーリエ変換してみますと,

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (2.5a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt x^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x(t+\tau)e^{-i2\pi f\tau} \quad (2.5b)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x^*(t)e^{i2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dt' x(t')e^{-i2\pi ft'} \quad (2.5c)$$

$$= |x(f)|^2 = S_x(f) \quad (2.5d)$$

となります. つまり, 自己相関関数のフーリエ変換はエネルギースペクトル密度 $S_x(f)$ となり, 両者が密接に関係していることが分かります.

2.1.2 エネルギーが無限の場合

続いてエネルギーが無限の確定信号 $x(t)$ の場合を考えます. この場合, 先に述べた通り波のエネルギーは発散するため, 「単位時間当たりのエネルギー」であるパワーが意味のある量となります.

信号 $x(t)$ のパワー P (例えば単位は [W], [J/s]) は次のように周波数 f ごとに分解された形で表現されます.

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df \quad (2.6a)$$

ここで, $S(f)$ はパワースペクトル密度 (単位は [W/Hz]) と呼ばれます. $S(f)$ と $x(t)$ は, 自己相関関数 $R(\tau)$ を用いて関係しています. $R(\tau)$ を広義積分を用いて

$$R(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (2.7)$$

と定義します. Eq. (2.5) と比較すると, $R(\tau)$ のフーリエ変換がパワースペクトル密度となっているはずです. そのため,

$$S(f) = \mathcal{F}[R(\tau)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau)e^{-i2\pi f\tau} \quad (2.8a)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x_T(f)|^2}{T} \quad (2.8b)$$

となります. ここで, $x_T(f)$ は

$$x_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad (2.9)$$

であり, $x(t)$ と

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & (-T/2 < t < T/2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2.10a)$$

$$(2.10b)$$

のように関係しています ([1] ほか).

2.1.3 (具体例) 単色信号のパワースペクトル密度

エネルギーが無限で確定信号である単色信号に対してパワースペクトル密度を考えてみます. 信号 $x(t)$ として

$$x(t) = x_A e^{i2\pi f_A t} \quad (2.11)$$

を考えてみます. まず $x_T(f)$ を求めてみますと

$$x_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \quad (2.12a)$$

$$= x_A \frac{\sin(\pi(f - f_A)T)}{\pi(f - f_A)} \quad (2.12b)$$

となるため、パワースペクトル密度は

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x_T(f)|^2}{T} \quad (2.13a)$$

$$= |x_A|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(\pi(f - f_A)T)}{\pi(f - f_A)} \right]^2 \quad (2.13b)$$

$$= |x_A|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi(f - f_A)T)}{\pi(f - f_A)} \cdot \text{sinc}(\pi(f - f_A)T) \quad (2.13c)$$

$$= |x_A|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \delta(f - f_A) \cdot \text{sinc}(\pi(f - f_A)T) \quad (2.13d)$$

$$= |x_A|^2 \delta(f - f_A) \quad (2.13e)$$

と求められます。上式の変形において、

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (2.14a)$$

$$\delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(kx)}{\pi x}, \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \quad (2.14b)$$

の關係を用いました。以上から、信号 $x(t) = x_A e^{i2\pi f_A t}$ のパワー P は、パワースペクトル密度 $S(f)$ を積分して、

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |x_A|^2 \delta(f - f_A) df \quad (2.15)$$

$$= |x_A|^2 \quad (2.16)$$

となります。仮に電圧 $x(t) = v(t)/\sqrt{Z}$ を考えていれば、その時のパワーは $P = |v_0|^2/Z$ となり、よく知られた結果となります。

今回の信号の場合、Eq. (2.7) から自己相関関数 $R(\tau)$ を直接計算してから $S(f)$ を直接求めることもできます。実際に自己相関関数をまず計算してみますと

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (2.17a)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_A^* e^{-i2\pi f_A t} \cdot x_A e^{i2\pi f_A (t + \tau)} dt \quad (2.17b)$$

$$= |x_A|^2 e^{i2\pi f_A \tau} \quad (2.17c)$$

と求められるため、 $S(f)$ は

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau) e^{-i2\pi f \tau} \quad (2.18a)$$

$$= |x_A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i2\pi f_A \tau} e^{-i2\pi f \tau} \quad (2.18b)$$

$$= |x_A|^2 \delta(f - f_A) \quad (2.18c)$$

となり、Eq. (2.13e) に一致します。

2.2 不規則信号

不規則信号はある区間の波形が単なる一例だけで与えられる信号です。不規則信号は関数として与えることができないため、関数の形で書けません。ですが、単なる一例として与えられた信号に、不規則信号の統計的な情報が含まれているだろうと仮定します。この単なる一例を見本関数と呼び、本稿では見本関数を対象に考えていきます。

規則信号の信号 $x(t)$ の場合と同様に、不規則信号の見本関数も $x(t)$ と書きますが、文脈で区別はつけられると思いますので、意識せずに同じ文字で記述していきます。

これから不規則信号 $x(t)$ を考えていきたいのですが、単純に不規則信号である、というだけではあまりに広い自由度を持ってしまいます。そのため、本節で考える不規則信号は、**弱エルゴード性**という性質を持つ信号に限ります [2]。この性質を持つ代表的な信号の一つは、熱雑音（ホワイトノイズ）です。

弱エルゴード性を持つ信号とは、(a) 広義定常性を持ち（弱定常信号であること）、(b) エルゴード的である信号のことを言い、以下に詳細を示します²。

(a) 広義定常性を持つこと（弱定常信号であること）

- 期待値³が時間に依存せず、一定値であること

信号を時間 t の関数 $x(t)$ とすると、期待値 $\langle x \rangle$ は

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;t)dx \quad (2.19)$$

で与られます。ここで、 $p(x;t)$ は確率分布関数で $\int_{-\infty}^{\infty} p(x;t)dx = 1$ を満たします⁴。 $\langle x \rangle$ が時刻によって変わらない場合にこの条件が満たされます。時間 t の積分ではないことに注意してください。これを理解するには具体例 (2.2.1 項) を見たほうが早いかもしれません。

- 分散が有限であること

分散 $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ は

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x;t)dx \quad (2.20)$$

で与られます。この量が有限になる場合にこの条件が満たされます。

²エルゴードという言葉の意味がなかなかつかめず、弱エルゴードなのかエルゴードなのかふわふわした説明になるかと思えます。

³期待値（または集合平均、アンサンブル平均）は、ある時刻に期待される信号の値です。出てきた値に注目します。一方、平均値（または時間平均、移動平均）は、信号の値を時間で（算術）平均した量です。

⁴ $p(x;t)$ と、セミコロンを用いている意味は、 p は x, t の関数であるが、今注目するのは x だけであり、 t はそこまで重要ではない、という意味の書き方です。

- 自己相関関数が時間差のみによって決まる関数となること

この条件の意味は、信号を切り取りを開始した時刻によってその統計的な性質が変わらないことを意味します。

(b) 弱エルゴード的である

- 期待値 $\langle x \rangle$ と平均値 \bar{x} が等しい

Eq. (2.19) で計算される期待値 $\langle x \rangle$ と、以下で定義される平均値 \bar{x}

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (2.21)$$

の両者が等しいことを言います。

※弱エルゴード性とは通常、2次の期待値 $\langle x^2 \rangle$ までの等しいことを言うようです [4][9]。つまり、

$$\overline{(x - \bar{x})^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - \bar{x})^2 dt \quad (2.22)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x^2(t) - \bar{x}^2) dt \quad (2.23)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x; t) dx \quad (2.24)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - \langle x \rangle^2) p(x; t) dx = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (2.25)$$

も成立します。また、強エルゴード性という言葉もあり、それは任意の次数の期待値と平均値が一致する場合に言うようです [4]。

また、信号がエルゴード性を持つならば、過去の時間平均が将来の時間平均に等しいと言えます [7][5]。

2.2.1 白色雑音のパワースペクトル密度

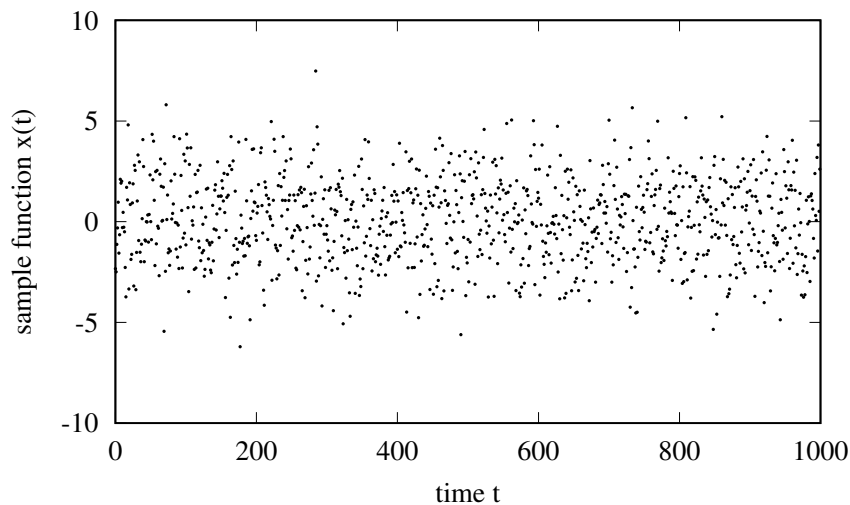


Figure 1: 白色雑音（白色ガウス雑音）の例

不規則信号である白色雑音（ホワイトノイズや熱雑音の近似としての信号など）のパワースペクトル密度を考えてみましょう。

白色雑音の定義は、

- 平均値がゼロになること⁵
- 自己相関関数がデルタ関数に比例すること

となります。図で白色雑音を示せば、Fig. 1のような分布を持つ信号です。ここでは応用上よく登場する、確率密度関数がガウス関数になる白色雑音（白色ガウス雑音）を示しています。

もしも平均値がゼロではなく、ある値周りに存在するノイズであれば次のように新たな見本関数 $y(t)$ を作成し、 $y(t)$ を $x(t)$ として考えることで白色雑音の定義に合わせることができます。

$$y(t) = x(t) - \langle x \rangle \quad (2.26)$$

$$= x(t) - \bar{x} \quad (\text{エルゴード性より}) \quad (2.27)$$

$$= x(t) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (\text{連続の場合}) \quad (2.28)$$

$$y(t_m) \approx x(t_m) - \frac{1}{N} \sum_{m'}^N x(t_{m'}) \quad (\text{離散の場合}) \quad (2.29)$$

⁵エルゴード性があると考えているので、この平均値は時間平均、集合平均のどちらでも良いです。計算しやすいほうで求めます。

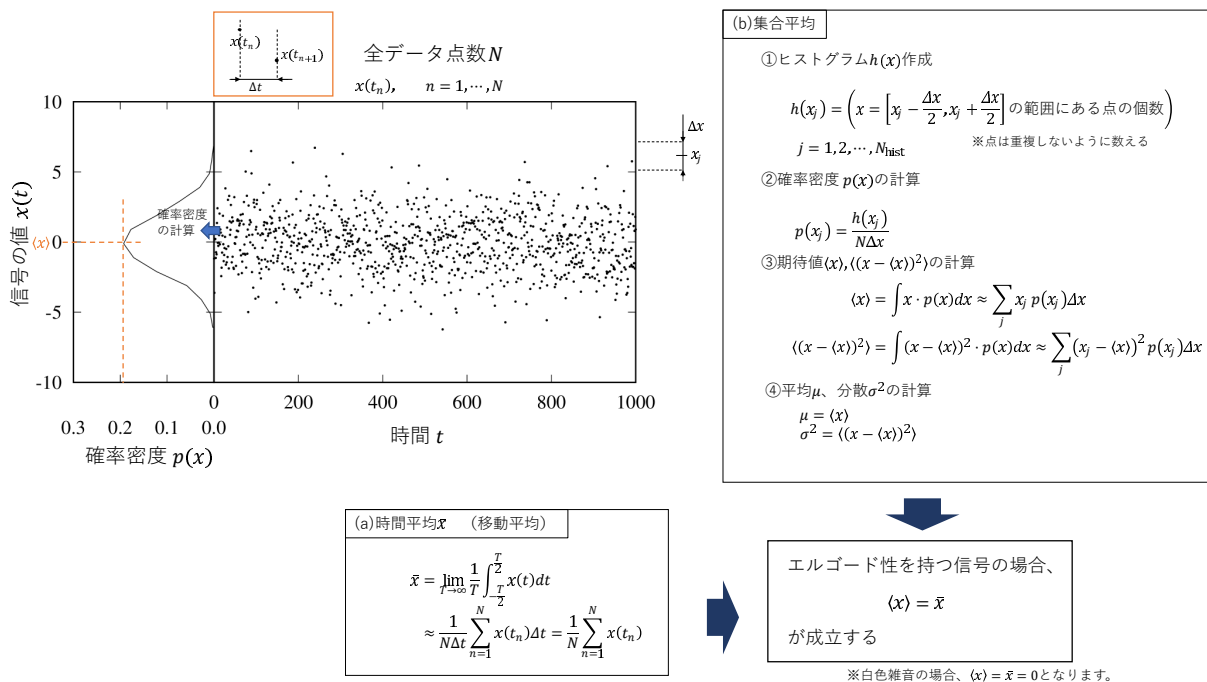


Figure 2: 白色雑音の信号例とその期待値・平均値の説明. ヒストグラムの作成については [6] を参照.

以降, 白色雑音の見本関数 $x(t)$ を時間 t の”関数”として書きます. $x(t)$ は完全にランダム性を持つものから生じると考えますと, 見本関数自体とほんの少し時間がずれただけの見本関数は直交します. 唯一従属な時間は, そのずれが全くないときだけとなります.

つまり, 白色雑音の自己相関関数 $R(\tau)$ は定義通りに

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t + \tau) dt \tag{2.30}$$

$$= \sigma^2 \delta(\tau) \tag{2.31}$$

とデルタ関数に比例します. ここで σ (σ^2 は分散) は定数です.

白色雑音のパワースペクトル密度 $S(f)$ を求めるために $R(\tau)$ をフーリエ変換しますと

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sigma^2 \delta(\tau) e^{-i2\pi f\tau} \tag{2.32}$$

$$= \sigma^2 \tag{2.33}$$

となり, 周波数に関わらず一定値になることが分かります.

白色雑音の重要な結論の一つとして, そのパワー (単位時間当たりのエネルギー) は無限大となることが分かります. $S(f)$ よりパワーを求めてみますと,

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} df = \infty \tag{2.34}$$

となります。この無限大が現れる原因は周波数の区間が $[-\infty, \infty]$ と、無限にわたる積分であることに由来します。

以上のように、白色雑音はエネルギーだけではなくパワーでさえも無限大となることが分かります。ですが、実際には無限大の周波数区間を考慮することは不可能ですので、上の積分範囲には上限と下限が付き、白色雑音のパワーは有限に見えてしまいます。

2.2.2 白色雑音のパワースペクトル密度（補足）

さて、Eq. (2.31) の係数 c は分散 σ^2 に等しいとして多くの参考書で与えられますが、これはどこから出た結論なのか計算しておきましょう。

信号が弱エルゴード性を持つならば、 $R(\tau)$ を期待値として計算できます。つまり、

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (2.35a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)p(x;t)dx \quad (2.35b)$$

$$= \delta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 p(x;t)dx \quad (2.35c)$$

と変形することができます。ここで Eq. (2.35a) から Eq. (2.35b) へはエルゴード性を利用して、Eq. (2.35b) から Eq. (2.35c) は

$$\int f(t)n(\sigma, t+\tau)dt = 0 \quad (2.36a)$$

$$\int f(t)n^*(\sigma, t)n(\sigma, t+\tau)dt = \delta(\tau) \int |n(\sigma, t)|^2 f(t)dt \quad (2.36b)$$

という関係式があるだろうと仮定しました。ここで $n(\sigma, t)$ は分散 σ^2 を持つ白色雑音を意味します。Eq. (2.36) は全く証明はしていませんが、きっと成り立っていそうな感じがします⁶ので使用します。

もし $x(t)$ が実関数で与えられているならば、

$$R(\tau) = \delta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 p(x;t)dx \quad (2.37)$$

ですので、積分の部分はまさに分散 σ^2 の定義そのものとなっています。そのため、定数 $c = \sigma^2$ と書くことができます。

具体的に白色雑音の一つである白色ガウス雑音で計算しておきましょう。確率密度関数は

$$p(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.38)$$

⁶私自身、数学ではなく物理出身ですので、つまりそういうことです

となります。ここで、 μ, σ^2 はガウス関数の平均、分散を意味します。結局、白色雑音の定義から $\mu = 0$ としますが、計算するうえでは残したまま進めます。積分を実行すると

$$R(\tau) = \delta(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 p(x; t) dx \quad (2.39a)$$

$$= \delta(\tau) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (2.39b)$$

$$= (\sigma^2 + \mu^2) \delta(\tau) \quad (2.39c)$$

となります。白色雑音では $\mu = 0$ とするので、

$$R(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad (2.40)$$

となり、 c はまさに σ^2 に等しいことが計算できます。

3 実測定する場合

本章では、実際に信号を測定する場合を考えてみます。つまり、自己相関関数 Eq. (2.7) を計算するために信号 Eq. (2.10) を測定するのですが、無限の時間に渡る信号は測定することができません。つまり、有限の時間の範囲でしか測定することができません。そのため、有限の時間で実測定した信号と無限の時間で測定した信号との差を調べ、両者を換算できるようにしておく必要があります。

3.1 エネルギーが無限の信号を有限の時間で切り出した場合

エネルギーが無限の信号 $x(t)$ を時刻 $t = t_c$ を中心として時間 T で切り出した信号 $x(t_c, t)$ が、どのようなパワースペクトル密度 $S(t_c, \omega)$ を持つか導いてみます。 $x(t_c, t)$ を以下のように定義します。

$$x(t_c, t) \equiv x(t)w(t - t_c) \quad (3.1)$$

ここで、 $w(t)$ は時刻 $t = 0$ 周りで幅 T を持つ窓関数で、

$$w(t) = \begin{cases} w(t), & (-T/2 \leq t \leq T/2) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.2)$$

です。 $w(t)$ は区間内で連続で、特異点などは存在しないと考えます。続いては自己相関関数 $R(t_c, \tau)$ です。 $R(t_c, \tau)$ は Eq. (2.7) の極限をなくして、

$$R(t_c, \tau) \equiv \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt x^*(t_c, t)x(t_c, t + \tau) \quad (3.3)$$

で定義します。積分区間が無限ですが、これは τ にとっては時刻の制限をする必要は特になく、また $x(t_c, t)$ は範囲 T の有限範囲で収まるため無限で書いています。

$R(t_c, \tau)$ を整理します。

$$R(t_c, \tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt x^*(t_c, t)x(t_c, t + \tau) \quad (3.4a)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df x^*(t_c, f)x(t_c, f)e^{i2\pi f\tau} \quad (3.4b)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df |x(t_c, f)|^2 e^{i2\pi f\tau} \quad (3.4c)$$

ここで、 $x(t_c, f)$ のフーリエ変換

$$x(t_c, f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t_c, t)e^{-i2\pi f\tau} \quad (3.5)$$

を定義しました. パワースペクトル密度 $S(t_c, f)$ を $R(t_c, \tau)$ のフーリエ変換で定義すると

$$S(t_c, f) \equiv \mathcal{F}[R(t_c, \tau)](f) \quad (3.6a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i2\pi f\tau} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df' |x(t_c, f')|^2 e^{i2\pi f'\tau} \quad (3.6b)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df' |x(t_c, f')|^2 \delta(f' - f) \quad (3.6c)$$

$$= \frac{1}{T} |x(t_c, f)|^2 \quad (3.6d)$$

となります.

もう少しだけ $x(t_c, f)$ を変形してみましょう. $x(t), w(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-i2\pi ft} \\ w(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt w(t) e^{-i2\pi ft} \end{array} \right. \quad (3.7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-i2\pi ft} \\ w(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt w(t) e^{-i2\pi ft} \end{array} \right. \quad (3.7b)$$

で定義すると,

$$x(t_c, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t_c, t) e^{-i2\pi ft} \quad (3.8a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) w(t - t_c) e^{-i2\pi ft} \quad (3.8b)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f') w(f - f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \quad (3.8c)$$

となります. Eq. (3.6d) に代入すれば,

$$S(t_c, f) = \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f') w(f - f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \right|^2 \quad (3.9)$$

を得ます. 比較のために無限の時間を考えた場合のパワースペクトル密度 $S(f)$ を再掲しますと,

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |x_T(f)|^2 \quad (3.10)$$

となります (Eq. (2.8b) より).

3.2 窓関数の規格化

Eq. (3.9), (3.10) を比較して違いを見れば、窓関数が入ることによって本来見たい信号がどの程度歪んでしまうかという話を議論することができます。期待することは適切に窓関数を規格化したときに

$$S(t_c, f) = S(f) \cdot (w \text{ のみを含む関数})$$

と書くことができ、任意の信号と任意の周波数 f について、信号と関係のない (w のみを含む関数) と本来の信号のパワースペクトル密度 $S(f)$ との積のように簡単な形になり分離されるようになることです。しかし、このような変形はできません。もしも、Eq. (3.9), (3.10) を等しくなるように決めたいのであれば、どのような窓関数の規格化が適切でしょうか。それを見ていきましょう。

規格化の方法で代表的なものは少なくとも 2 種類存在します。それらは

1. 信号のパワーが一致するように決める
2. 周波数 $f = f_A$ の信号についてのみ、パワースペクトル密度が矩形窓 (後述) と一致するように決める

です。1. については項 3.2.1 で説明し、2. については項 3.2.2 で説明します。

3.2.1 信号のパワーが一致するように決める規格化

説明の流れは以下の通りに行います。

1. パワースペクトル密度を確定信号のそれと一致させようとする
2. 一致させる条件にデルタ関数が出てきてしまい、有限の範囲で書けない
3. 周波数で積分して、パワースペクトル密度ではなくパワーを一致させる

まず、Eq. (3.9), (3.10) が等しいという条件から窓関数 w を決める条件が計算できることを期待して計算します。つまり両者

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |x_T(f)|^2 \quad (3.11a)$$

$$S(t_c, f) = \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f') w(f - f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \right|^2 \quad (3.11b)$$

が一致するような w を見つけます。

項 2.1.3 の例で見たように、周波数 f_A を持つ確定信号である単色信号 $x(t) = x_A e^{i2\pi f_A t}$ の場合、左辺は $|x_A|^2 \delta(f - f_A)$ に等しくなるため計算ができそうです。そのため、単色信号

についてのみ考えることにしましょう。単色信号ではない場合も書けますが、近似的にし
か成立しません。

Eq. (3.11) をそれぞれ変形していくと、

$$\text{Eq. (3.11a)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |x_T(f)|^2 \quad (3.12a)$$

$$= |x_A|^2 \delta(f - f_A) \quad (3.12b)$$

$$\text{Eq. (3.11b)} = \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f') w(f - f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \right|^2 \quad (3.13a)$$

$$= \frac{|x_A|^2}{T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta(f' - f_A) w(f - f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \right|^2 \quad (3.13b)$$

$$= |x_A|^2 \frac{|w(f - f_A)|^2}{T} \quad (3.13c)$$

となるので、両者が一致するならば

$$|w(f)|^2 = T\delta(f) \quad (3.14)$$

という関係を満たすように窓関数を決定すれば良いことが分かります。単色信号に限り
ですが窓関数を掛けたパワースペクトル密度から窓関数を掛けないパワースペクトル密度
へ焼きなおすことができそうです。

…とは言いましても、絶対値二乗をしてデルタ関数になる関数とは何でしょうか。形式
的には

$$w(f) = e^{i\theta} [T\delta(f)]^{1/2} \quad (3.15)$$

と書けますが (θ は任意の実数)、この表記に意味はなさそうです。この問題の原因はデル
タ関数です。デルタ関数は積分して初めて意味のある量になりますので、パワースペクト
ル密度ではなく、パワーが一致するように窓関数を決めるように方針を変えましょう。別
の言い方では、それぞれの周波数でパワースペクトル密度が一致することは諦めて周波数
全体でさえ合っていれば良いとするのです。式の上では、

$$\int_{-\infty}^{\infty} df S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} df S(t_c, f) \quad (3.16)$$

となるように w の条件を弱く決めるのです。それぞれを計算していくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} df S(f) = |x_A|^2 \quad (3.17a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} df S(t_c, f) = |x_A|^2 \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df |w(f)|^2 \quad (3.17b)$$

となるので、パワーを一致させるための窓関数の規格化条件

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df |w(f)|^2 = 1 \quad (3.18a)$$

or

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt |w(t)|^2 = 1 \quad (3.18b)$$

を得ます。このように窓関数を決定すれば、パワーが窓関数無しの場合と一致するように決めることができます。ここでパーセバルの定理より、周波数と時間の積分を変更できるため Eq. (3.18a), Eq. (3.18b) を併記しています。

問題があるとするならば、パワースペクトル密度の一致を諦めているためある周波数にどのくらいその信号の成分があるか？が分からないことでしょうか。次の項では、本稿で諦めてしまったパワースペクトル密度の一致をもう一度考えてみます。

3.2.2 周波数 $f = f_a$ の信号についてのみ、パワースペクトル密度が矩形窓と一致するよ うに決める

説明の流れは以下の通りに行います。

1. 確定信号のパワースペクトル密度が矩形窓で近似的に書けるとする
2. 単色信号を考えた場合に計算が進められる
3. 矩形窓で求めた単色信号のパワースペクトル密度と一致するように窓関数の条件を決める

ここで確定信号の周波数は矩形窓が正確に働く場合を意味します。また矩形窓の場合と同じ値になるだけであり、無限時間の確定信号のパワースペクトル密度と関係はありません。

パワーが一致することを目標に規格化を考えましたが、ある周波数のパワースペクトル密度だけが等しくなればよいという考えを元にフーリエ変換結果が等しいとして規格化を Eq. (3.11) では両辺をそのまま見ましたが、 T は十分大きいとして極限を外して考えてみましょう。極限を外したことにより、これは T の区間で行うフーリエ変換となり、 $T \rightarrow \infty$ にとることによっていくらかでも無限時間のフーリエ変換に近づけることができます。つまり、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |x_T(f)|^2 \approx \frac{1}{T} |x_T(f)|^2 \quad (3.19)$$

が十分に成立していると考えます。右辺の T は窓関数の幅 T に等しい場合です。右辺が窓関数を書いた場合のパワースペクトル密度 $S(t_c, f)$ に等しいと考えれば、

$$\frac{1}{T} |x_T(f)|^2 = S(t_c, f) \quad (3.20a)$$

$$= \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f') w(f - f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \right|^2 \quad (3.20b)$$

と書けます。両辺が同じになるためには、絶対値の記号の中が等しければ良いので、

$$x_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f') w(f - f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \quad (3.21)$$

が成立していてほしいと考えます。絶対値の符号を外した際に $e^{i\theta}$ という自由度が生じますが、フーリエ変換そのものが一致するように決められれば、絶対値も一致するので $\theta = 0$ にとっています⁷。

⁷元々 θ を入れて計算を進め、最後まで進めた後で $\theta = 0$ でも成り立つよね、ということが分かっているために初めから $\theta = 0$ をいれています。

左辺の $x_T(f)$ は Eq. (2.9), (2.10) で定義していますが, これは窓関数が矩形窓 $w_{\text{rect}}(t)$ の場合の右辺に一致します. 具体的には,

$$x_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-i2\pi ft} \quad (3.22a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w_{\text{rect}}(t)e^{-i2\pi ft} \quad (3.22b)$$

$$w_{\text{rect}}(t) = \begin{cases} 1 & (-T/2 < t < T/2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.22c)$$

$$(3.22d)$$

と書き換えることができます.

このままでは計算ができないのでパワーの規格化の時と同様に, せめて単色信号 $x(t) = x_A e^{i2\pi f_A t}$ の場合ならば両辺を合わせることができただろう, と考えて Eq. (3.20b) の両辺に代入します. すると

$$(\text{Eq. (3.20b) の左辺}) = x_A \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi(f-f_A)t} dt \quad (3.23a)$$

$$= x_A e^{-i2\pi(f-f_A)t_c} T \text{sinc}(\pi(f-f_A)T) \quad (3.23b)$$

$$(\text{Eq. (3.20b) の右辺}) = \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f') w(f-f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \quad (3.24a)$$

$$= x_A \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta(f' - f_A) w(f-f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \quad (3.24b)$$

$$= x_A e^{-i2\pi(f-f_A)t_c} w(f-f_A) \quad (3.24c)$$

となります. 今, 規格化を決めるにあたって気にしているのは単色信号の持つ周波数 $f = f_A$ の振幅値のみですので, $f = f_A$ を代入します⁸. すると, 窓関数の規格化条件

$$\frac{1}{T} w(f=0) = 1 \quad (3.25)$$

を得ます. 逆フーリエ変換して時間の領域で規格化条件を書けば

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 1 \quad (3.26)$$

となります⁹.

⁸もし離散化されている場合, $f = f_m = m\Delta f = m/T$ しか許されないため Eq. (3.23b) はいつも $x_A T$ になるとは限りません. このことから, 離散化された周波数以外の周波数の信号が入ってきた場合, 単色信号であっても振幅値は正確な値ではなくなります.

⁹ $w(t)$ は $[-T/2, T/2]$ しか値を持たないと仮定したので, 無限の積分区間である必要はないですが無限にしておいても問題ないということでそうしています. 実は窓関数として無限区間のガウス関数などを使用することもできますので, その場合は無限区間でなければなりません.

以上より $f = f_a$ しか持たない信号を基準とし、矩形窓を適用したときの振幅と一致するように窓関数を決める場合は Eq. (3.26) を満たすように窓関数を決めなければならない、という結論を得ました。

さて、Eq. (3.26) のように規格化した場合、 $f = f_a$ は矩形窓と同じになることは分かりましたが、その周辺の振幅はどうなるでしょうか。 $f = f_{n'} = f_a + n'\Delta f = f_a + n'/T$, (n' は整数で $n'\Delta f \neq f_a$) として考えてみましょう。 Eq. (3.27a) に $f = f_{n'}$ を代入すればよいので、

$$\text{矩形窓の場合 : } S(t_c, f_{n'}) = \frac{1}{T} \left| x_A e^{-i2\pi(f_{n'} - f_A)t_c} T \text{sinc}(\pi(f_{n'} - f_A)T) \right|^2 \quad (3.27a)$$

$$= 0 \quad (3.27b)$$

$$\text{任意の窓の場合 : } S(t_c, f_{n'}) = \frac{1}{T} \left| x_A e^{-i2\pi(f_{n'} - f_A)t_c} w(f_{n'} - f_A) \right|^2 \quad (3.28a)$$

$$= \frac{|x_A|^2}{T} |w(f_{n'} - f_A)|^2 \quad (3.28b)$$

となります。 $f = n'\Delta f$ に制限した場合、時間で切り取った境界において周期境界条件が満たされるため、矩形窓による切り取りは正確なものとなります。つまり、 $(f - f_a)T = (\text{整数})$ であり、この条件を満たす周波数においては $\text{sinc}(\pi(f - f_a)T) = 0$ となり、期待する結果に等しくなります。窓関数が入ったことにより、値を持たないはずのパワースペクトル密度が Eq. (??) の値を持ってしまふことが分かりました。

3.3 無限区間の信号と有限区間の信号の違い

最後に有限区間に区切った場合と無限区間の場合との違いは今まで考えていませんでしたので、それを見ておきましょう。我々の目的は、あくまで無限区間の場合を求めたいので、有限区間の信号として扱った場合との違いを知りたいわけです。

ここでは前項(3.2.2)で見たパワースペクトル密度を一致させる窓関数の規格化を採用して議論していきます。注目するスペクトルは $f = f_A$ の単色信号のみとします。そのため、どのような窓でも $f = f_A$ にある信号の値にだけ注目するならば変わらないように規格化されているため、計算が簡単な矩形窓で考えましょう。矩形窓の場合、結果 Eq. (3.27a) が使用できるので、有限区間の場合のパワースペクトル密度は

$$S(t_c, f_n) = |x_A|^2 T \delta_{n, n_A} \quad (3.29)$$

となります。ここで、有限区間であることから離散化も同時に行われており、 n_A は整数で $f_A = n_A \Delta f$ の関係があります。一方、無限区間の場合は

$$S(f) = |x_A|^2 \delta(f - f_A) \quad (3.30)$$

となります。さて、有限区間のパワースペクトル密度は測定幅 T を含むため、欲しい結果とは $T = 1/\Delta f$ 倍の差が生じてしまっています¹⁰。そこで、周波数に区切ったままパワーの次元を持たせるように新たな量 $P(t_c, f)$ を定義することにします。 $P(t_c, f)$ は以下のような関係から導かれます。

信号のパワー P を離散化する場合の計算式は

$$P(t_c) = \int_{-\infty}^{\infty} df S(t_c, f) \xrightarrow{\text{有限区間化 (離散化)}} \sum_n^N S(t_c, f_n) \Delta f \quad (3.31a)$$

となるので、パワースペクトル密度 $S(t_c, f_n)$ の代わりに、右辺 $S(t_c, f_n) \Delta f$ を

$$\text{周波数 } f \text{ 周りの周波数幅に含まれるパワー } P(t_c, f)$$

としてこれをパワースペクトル密度に変わる量として定義します¹¹。 $P(t_c, f_n)$ の周波数幅とは、 $f_n - \frac{\Delta f}{2} \leq f_n \leq f_n + \frac{\Delta f}{2}$ の区間を指します。

¹⁰ もちろん、連続の場合においてデルタ関数を離散化すると離散の場合と同じになります。ですが、今注目しているのは離散化した場合の $f = f_A$ における値そのものを比較していますので、その違いに注意してください。

¹¹ 恐らくこれが”パワースペクトル”と呼ばれる量だと思われそうですが、自信はないです。そこで本稿では、周波数幅に含まれるパワーと呼ぶことにします。

以上より、周波数 $f = f_n$ 周りの周波数幅に含まれるパワー $P(t_c, f_n)$ は

$$P(t_c, f_n) \equiv S(t_c, f_n)\Delta f = |x_A|^2 T \Delta f \delta_{n, n_A} \quad (3.32)$$

$$= |x_A|^2 \delta_{n, n_A} \quad (3.33)$$

と書くことができ、測定に由来する量 T を含むことが無くせました。この場合、測定上のパラメータ $T (= 1/\Delta f)$ を測定値の振幅から排除することができ、離散化した場合の $f = f_A$ における値そのものを直読みすることができます。

実測定する場合には、こちらの周波数幅に含まれるパワーが使用されることが多いです。

3.4 複数の信号が存在する場合

単色信号が入ってきた場合、Eq. (3.26) による規格化を任意の窓関数に対して実施することにより矩形窓で実施したパワースペクトル密度と等しくなるようにできることを前項で見ました。では、このように規格化した場合に複数の周波数が入ってきた場合のパワースペクトル密度はどのようになるのでしょうか。これを考えてみましょう。2つの周波数 $f = f_A, f_B$ を持つ信号を

$$x(t) = x_A e^{-i2\pi f_A t} + x_B e^{-i2\pi f_B t} \quad (3.34)$$

と書きます。また、特に矩形窓がうまく働く周波数に信号があると仮定して、具体的に $f_A = n_A/T, f_B = n_B/T$ (n_A, n_B は整数) を考えます。

上記の場合に矩形窓、任意の窓関数を適用した場合を考えていきますと下記のようになります。

- 矩形窓の場合

フーリエ変換結果は

$$x_T(t_c, f) = x_A T e^{-i2\pi(f-f_A)t_c} \text{sinc}(\pi(f-f_A)T) + x_B T e^{-i2\pi(f-f_B)t_c} \text{sinc}(\pi(f-f_B)T) \quad (3.35)$$

となります。観測する周波数を離散化 ($f \rightarrow f_n = n \cdot \Delta f$) して考える場合、

$$x_T(t_c, f_n) = x_A T \delta_{n, n_A} + x_B T \delta_{n, n_B} \quad (3.36)$$

であり、パワースペクトル密度は、

$$S(t_c, f_n) = |x_A|^2 T \delta_{n, n_A} + |x_B|^2 T \delta_{n, n_B} \quad (3.37)$$

となります。周波数幅に含まれるパワー $P(t_c, f_n)$ は

$$P(t_c, f_n) = |x_A|^2 \delta_{n, n_A} + |x_B|^2 \delta_{n, n_B} \quad (3.38)$$

となり, 特に $n = n_A$ において

$$P(t_c, f_{n_A}) = |x_A|^2 \quad (3.39)$$

となります.

- 任意の窓関数 w の場合

フーリエ変換結果は

$$x_T(t_c, f) = x_A w(f - f_A) e^{-i2\pi(f-f_A)t_c} + x_B w(f - f_B) e^{-i2\pi(f-f_B)t_c} \quad (3.40)$$

となります. 観測する周波数を離散化 ($f \rightarrow f_n = n \cdot \Delta f$) して考える場合,

$$x_T(t_c, f_n) = x_A w((n - n_A)\Delta f) e^{-i2\pi(n-n_A)\Delta f \cdot t_c} + x_B w((n - n_B)\Delta f) e^{-i2\pi(n-n_B)\Delta f \cdot t_c} \quad (3.41a)$$

$$= x_A w_{n-n_A} e^{-i2\pi(n-n_A)\Delta f \cdot t_c} + x_B w_{n-n_B} e^{-i2\pi(n-n_B)\Delta f \cdot t_c} \quad (3.41b)$$

です. ここで,

$$w_k \equiv w(k\Delta f) \quad (3.42)$$

と置きました. パワースペクトル密度は,

$$S(t_c, f_n) = \frac{1}{T} |x_T(t_c, f_n)|^2 \quad (3.43a)$$

$$= \frac{1}{T} \left[|x_A|^2 |w_{n-n_A}|^2 + |x_B|^2 |w_{n-n_B}|^2 + 2\text{Re} \left(x_A x_B^* w_{n-n_A} w_{n-n_B}^* e^{i2\pi(n_A-n_B)\Delta f \cdot t_c} \right) \right] \quad (3.43b)$$

となります. 周波数幅に含まれるパワー $P(t_c, f_n)$ は

$$P(t_c, f_n) = \frac{S(t_c, f_n)}{T} \quad (3.44)$$

であり, 特に $n = n_A$ において

$$P(t_c, f_{n_A}) = \frac{1}{T^2} \left[|x_A|^2 T^2 + |x_B|^2 |w_{n_A-n_B}|^2 + 2\text{Re} \left(x_A x_B^* T w_{n_A-n_B}^* e^{i2\pi(n_A-n_B)\Delta f \cdot t_c} \right) \right] \quad (3.45)$$

$$= |x_A|^2 + |x_B|^2 \left| \frac{w_{n_A-n_B}}{T} \right|^2 + 2\text{Re} \left(x_A x_B^* \frac{w_{n_A-n_B}^*}{T} e^{i2\pi(n_A-n_B)\Delta f \cdot t_c} \right) \quad (3.46)$$

となります.

Eq. (3.39), Eq. (3.46) を比較してみます. Eq. (3.39) は, 信号が周波数 $f = f_A$ しか持たない場合の周波数幅に含まれるパワー $|x_A|^2$ に等しいことから, 別の周波数 $f = f_B$ に信号が存在していても周波数幅に含まれるパワーに影響がないことが分かります.

しかし Eq. (3.46) を見ると $|x_A|^2$ だけではなく、第2, 3項には窓関数に関する $w_{n_A-n_B}$ の2次, 1次が現れており、その分だけ周波数幅に含まれるパワーに影響することが分かります。もし、これがゼロになれば Eq. (3.39) と一致することも分かります。つまり、パワースペクトル密度を合わせる目的に置く窓関数を選ぶ条件として、 $w_{n_A-n_B} \rightarrow 0$ が満たされる窓関数を選ぶことが好ましいことが分かります。

よってパワースペクトル密度 (または周波数幅に含まれるパワー) を合わせる目的で窓関数を決定する条件として

$$w(f=0) = 1 \quad (3.47)$$

$$w(f \neq 0) \rightarrow 0 \quad (3.48)$$

が満たされるほど良いことが分かりました。そのため、窓関数自身のフーリエ変換が重要だということが分かります。

窓関数がどのように減衰するべきかは Eq. (3.47) からは何の条件も言えません。つまり $f=0$ から離れるにつれてゼロになってほしい、 $f=0$ 周りではそんなにゼロにならなくても良いがある程度離れると急激にゼロになるなど様々な特徴を持つ窓関数の場合によって選ぶ必要があります。

4 離散化した場合の窓関数の影響

今までは連続の信号について主に議論してきましたが、実用上は信号は離散化されていますので、それを考えていきます。つまり知りたいのは離散化された信号の場合に、

- フーリエ変換結果
- パワースペクトル密度
- 窓関数の影響

がどのように書かれるかを知りたいわけです。

実際の信号を等間隔に離散化した場合、必ず有限区間で区切ることになるため窓関数が必ず掛かっています。

今までの結果を整理してから離散化について議論しましょう。無限に続く確定信号 $x(t)$ に対し、時刻 $t = t_c$ 周りで t_c を中心として幅 T の区間のみ値を持つ窓関数 $w(t - t_c)$ を掛け合わせた信号 $x(t_c, t) = x(t)w(t - t_c)$ を考えます。 $x(t_c, t)$ のパワースペクトル密度 $S(t_c, f)$ は、

$$S(t_c, f) = \frac{|x(t_c, f)|^2}{T} \quad (4.1)$$

と書けます。ここで $x(t_c, f)$ は $x(t_c, t)$ のフーリエ変換で

$$x(t_c, f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t_c, t) e^{-i2\pi ft} \quad (4.2a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) w(t - t_c) e^{-i2\pi ft} \quad (4.2b)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f') w(f - f') e^{-i2\pi(f-f')t_c} \quad (4.2c)$$

の関係があります。

項 3.2.2 で見たように、もしも窓関数 $w(t)$ が

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 1 \quad (4.3)$$

を満たすように規格化されている場合、周波数 $f = f_A$ のみを持つ信号（単色信号）が入ってきた場合にパワースペクトル密度が矩形窓の場合と同じ値になります。つまり矩形窓を特に $w_{\text{rect}}(t)$ と書き、単色信号を $x_{\text{mono}}(t) = x_A e^{i2\pi f_A t}$ と書くとき、 $f = f_A$ においてのみ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt x_{\text{mono}}(t) w_{\text{rect}}(t - t_c) e^{-i2\pi ft} = \int_{-\infty}^{\infty} dt x_{\text{mono}}(t) w(t - t_c) e^{-i2\pi ft} \quad (4.4)$$

の関係を持つということです。パワーで規格化する際は同様の手順で実施できますので省略します。

では離散化を実施していきましょう. まずは離散フーリエ変換です.

本稿の離散フーリエ変換は付録 B に従って離散化します. $t_c = t_{N/2}$ のように, 離散化する時間の中心に t_c を取るようにすると

$$e^{i2\pi f_n t_a} x(t_c, f_n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(t_m) w(t_m - t_c) e^{-i2\pi n m / N} \Delta t \quad (4.5a)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(t_m) w(t_{m-N/2}) e^{-i2\pi n m / N} \Delta t \quad (4.5b)$$

となります.

窓関数の規格化を決める積分は

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt \rightarrow \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=0}^{N-1} w(t_m) \Delta t \quad (4.6a)$$

として離散化されるので, 離散化した場合の規格化は

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(t_m) = 1 \quad (4.6b)$$

と書けます.

パワーを一致させるような窓関数の規格化は振幅の場合と似たように,

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt \rightarrow \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=0}^{N-1} |w(t_m)|^2 \Delta t \quad (4.7a)$$

として離散化されるので, 離散化した場合の規格化は

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |w(t_m)|^2 = 1 \quad (4.7b)$$

で行えばよいです.

次の項からは, 窓関数を入れたときの影響を確認してみましょう.

4.1 単色信号, パワースペクトル密度で規格化

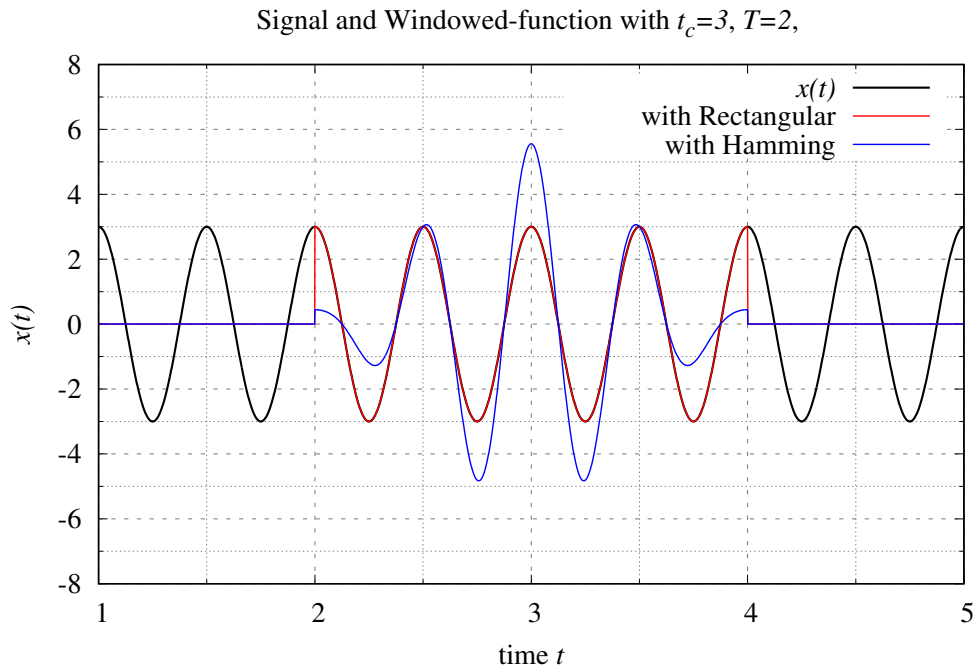


Figure 3: 窓関数を用いていないときの信号と、パワースペクトル密度で規格化された矩形窓 (赤線) とハミング窓 (青線) を作用させたときの信号の様子。

信号

$$x(t) = x_A e^{i2\pi f_A t} \quad (4.8a)$$

$$= x_A e^{i2\pi n_A \Delta f t} \quad (4.8b)$$

を区間 $t = [t_a, t_a + T]$ で矩形窓の場合と、矩形窓ではない窓関数を用いた場合を考えます。 $t = t_c = t_a + T/2$ を中心に窓関数を用いた後の信号 $x(t_c, t)$ は

$$x(t_c, t) = x(t)w(t - t_c) \quad (4.9)$$

と書けますので、今後はこの関数のフーリエ変換を考えていきます。窓関数を掛けていないときの信号と書けたときの一例を図示すれば、Fig. 3 のようになります。

また考えていく信号の周波数は $f_A = n_A \Delta f = n_A/T$ に一致する場合に制限しました。この理由は、この時に矩形窓は正確な離散フーリエ変換が可能になるため窓関数の比較がはっきりとできるからです。窓関数の影響を調べるのが目的ですので、窓関数の不連続性をなくす性質にはそこまで注視しません。

本節では矩形窓との比較として、コサイン窓 (パラメータによってハミング窓、ハミング窓になります) を例に考えます。

4.1.1 矩形窓の場合

矩形窓 (rectangular window) を考えます. 窓関数の規格化は, Eq. (3.26) または離散化した Eq. (4.6b) に従って実施されます. 矩形の窓関数を $w_{\text{rect}}(t)$ と書けば, 規格化定数 c を用いて

$$w_{\text{rect}}(t) = \begin{cases} c, & (-T/2 \leq t \leq T/2, c \text{ は規格化定数}) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.10)$$

と書けます. 規格化定数 c を求めてみますと,

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w_{\text{rect}}(t) dt = 1 \quad (4.11a)$$

$$\rightarrow c = 1 \quad (4.11b)$$

と求められます. つまり, 矩形窓の場合は単純に $c = 1$ となり, 信号をそのまま使用すればよいのです¹².

今, Eq. (4.8a) に矩形窓が掛かった信号

$$x(t_c, t) = x(t)w_{\text{rect}}(t - t_c) \quad (4.12)$$

について, 離散フーリエ変換を考えたいです. 関数 $x(t_c, t_m)$ の区間 $t = [t_a, t_a + T]$ の離散フーリエ変換 $x(t_c, f_n)$ とその逆変換は

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{i2\pi f_n t_a} x(t_c, f_n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(t_c, t_m) e^{-i2\pi n m / N} \\ x(t_m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(t_c, f_n) e^{i2\pi f_n t_a}] e^{i2\pi n m / N} \end{array} \right. \quad (4.13a)$$

$$(4.13b)$$

で与えられます¹³. 詳細は Eq. (B.5) をご覧ください.

¹²規格化は矩形窓が基準となっていますので, 当たり前といえば当たり前です.

¹³多くの場合, $t_a = 0$ が数値計算ライブラリなどで定義されています. パワースペクトル密度やパワーだけを考えた場合, 平行移動分を示す左辺の $e^{i2\pi f_n t_a}$ は絶対値二乗がとられることにより消えてしまいます. その意味で $t_a = 0$ にとって無いものと考えても問題ありません.

本題に戻って, 区間の中央である $t_c (= t_a + T/2)$ 周りで離散フーリエ変換を考えますと

$$e^{i2\pi f_n t_a} x(t_c, f_n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(t_c, t_m) e^{-i2\pi n m / N} \quad (4.14a)$$

$$(-1)^n x(t_c, f_n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_A e^{i2\pi n_A \Delta f (m \Delta t - T/2)} e^{-i2\pi n m / N} \quad (4.14b)$$

$$= (-1)^{n_A} x_A \sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\pi (n_A - n) m / N} \quad (4.14c)$$

$$= (-1)^{n_A} x_A N \delta_{n, n_A} \quad (4.14d)$$

より,

$$x(t_c, f_n) = x_A N \delta_{n, n_A} \quad (4.15)$$

という結果を得ます. つまり, パワースペクトル密度 $S(t_c, f_n)$ は,

$$S(t_c, f_n) = \frac{|x_A N|^2}{T} \delta_{n, n_A} \quad (4.16)$$

となります. 周波数幅に含まれるパワー $P(t_c, f_n)$ は

$$P(t_c, f_n) = |x_A|^2 \frac{N^2}{T^2} \delta_{n, n_A} \quad (4.17)$$

パワーは $P(t_c, f_n)$ の全 n について和を取ればよいので,

$$P(t_c) = \sum_{n=0}^{N-1} P(t_c, f_n) \quad (4.18a)$$

$$= |x_A|^2 \frac{N^2}{T^2} \quad (4.18b)$$

となります.

離散フーリエ変換結果 (4.15), パワースペクトル密度 (4.16), 周波数幅に含まれるパワー (4.16), パワー (4.18a) のどれも今回の信号の例では切り取った位置 t_c に依存しないことが分かります.

また, (全てに言えることですが特に) $P(t_c, f_n)$ に注目すると最後の結果に数値的なパラメータ N と測定幅 T を含んでおり, 期待する無限区間の信号の結果 (Eq. (3.33) の $|x_A|^2$) とは異なっています. つまり離散フーリエ変換結果 (4.15) にはフーリエ変換 1 回分の違い (つまり $\Delta t = \frac{T}{N}$) を掛け, パワースペクトル密度 (4.16), 周波数幅に含まれるパワー (4.16), パワー (4.18a) にはフーリエ変換 2 回分の違い (つまり $\Delta t^2 = \frac{T^2}{N^2}$) を掛ける必要があるわけです.

掛け合わせると,

$$x(t_c, f_n)\Delta t = x_A T \delta_{n, n_A} \quad (4.19a)$$

$$S(t_c, f_n)\Delta t^2 = |x_A|^2 T \delta_{n, n_A} \quad (4.19b)$$

$$P(t_c, f_n)\Delta t^2 = |x_A| \delta_{n, n_A} \quad (4.19c)$$

$$P(t_c)\Delta t^2 = |x_A|^2 \quad (4.19d)$$

となり, 無限区間の場合と比較できるようになります. そして, その結果は無限区間の場合に一致します.

矩形窓の場合の結果を図示しますと, Fig. 4の赤点のようになります. Fig. 4の上図に矩形窓を適用した場合のフーリエ変換結果, 下図にパワースペクトル密度を示しました. 図中の黒点は期待する値を示し, 青点はこれから実施するコサイン窓の一つであるハミング窓で実施した結果を示しています.

4.1.2 矩形窓ではない場合

続いて代表的な窓関数であるコサイン窓を利用した場合を考えます. コサイン窓は自由度をひとつ持っており, 良く多用される代表的な窓関数 (ハニング窓 (Hanning window) とハミング窓 (Hamming window)) を包括します. 具体的にコサイン窓は

$$w(t) = \alpha - \beta \cos(2\pi t), (0 \leq t \leq 1) \quad (4.20)$$

で定義されます. ここで, $\beta = 1 - \alpha$ と置きました. ハニング窓の場合は $\alpha = 0.5$, ハミング窓の場合は $\alpha = 0.54$ です.

区間 $[a, b]$ であれば (定数倍の自由度は除いて)

$$w(t) = \alpha - \beta \cos\left(2\pi \frac{t-a}{b-a}\right), (a \leq t \leq b) \quad (4.21)$$

と書けます.

一般的に, 適当な窓関数 $w(t)$ を規格化する場合, まず以下の積分 (または和 Eq. (4.6b)) を計算し, 右辺 s を求めます.

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = s \quad (4.22)$$

この右辺を1にするようにしたいので, 両辺を s で割ります. すると

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w'(t) dt = 1 \quad (4.23)$$

となります. ここで, $w'(t) \equiv w(t)/s$ としました. こうして $w'(t)$ を用いることで規格化された窓関数で計算することができます.

Eq. (4.21) で区間 $[a, b (= a + T)]$ で決められたコサイン窓の場合,

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = \frac{1}{T} \int_a^b w(t) dt \quad (4.24a)$$

$$= \frac{1}{T} \int_a^b \left[\alpha - \beta \cos\left(2\pi \frac{t-a}{b-a}\right) \right] dt \quad (4.24b)$$

$$= A \quad (4.24c)$$

となります. つまり, 規格化されたコサイン窓 $w'(t)$ は Eq. (4.21) を Eq. (4.24c) で割ればよいので,

$$w'(t) = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \cos\left(2\pi \frac{t-a}{b-a}\right), \quad (a \leq t \leq b) \quad (4.25a)$$

$$= 1 + \frac{\beta}{\alpha} \cos(2\pi t/T), \quad (-T/2 \leq t \leq T/2) \quad (4.25b)$$

となります.

今, Eq. (4.8a) に窓関数が掛かった信号

$$x(t_c, t) = x(t)w'(t - t_c) \quad (4.26)$$

について, 区間の中央である $t_c = 0$ 周りで離散フーリエ変換を考えますと,

$$e^{i2\pi f_n t_c} x(t_c, f_n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(t_c, t_m) e^{-i2\pi n m / N} \quad (4.27a)$$

$$e^{i2\pi f_n t_c} x(t_c, f_n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(t_m) e^{-i2\pi n m / N} + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{m=0}^{N-1} x(t_m) \cos\left(\frac{2\pi t_m}{T}\right) e^{-i2\pi n m / N} \quad (4.27b)$$

$$(-1)^n x(t_c, f_n) = (-1)^{n_A} x_A N \delta_{n, n_A} - \frac{\beta}{\alpha} (-1)^{n_A} x_A \sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\pi n_A m / N} \frac{e^{i2\pi m / N} + e^{-i2\pi m / N}}{2} e^{-i2\pi n m / N} \quad (4.27c)$$

$$= (-1)^{n_A} x_A N \left[\delta_{n, n_A} - \frac{\beta}{\alpha} (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1}) \right] \quad (4.27d)$$

より,

$$x(t_c, f_n) = x_A N \left[\delta_{n, n_A} - \frac{\beta}{2\alpha} (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1}) \right] \quad (4.28)$$

を得ます.

以上より, パワースペクトル密度 $S(t_c, f_n)$ は,

$$S(t_c, f_n) = |x_A|^2 \frac{N^2}{T} \left[\delta_{n, n_A} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1}) \right] \quad (4.29)$$

とであり, 周波数幅に含まれるパワー $P(t_c, f_n)$ は

$$P(t_c, f_n) = |x_A|^2 \frac{N^2}{T^2} \left[\delta_{n, n_A} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1}) \right] \quad (4.30)$$

となります. パワーは, $P(t_c, f_n)$ を全 n について和を取って,

$$P(t_c) = \sum_{n=0}^{N-1} P(t_c, f_n) \quad (4.31a)$$

$$= |x_A|^2 \frac{N^2}{T^2} \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \right] \quad (4.31b)$$

となります.

矩形窓と同じように, 離散化した際のフーリエ変換の定義の違い Δt を考慮すると

$$x(t_c, f_n)\Delta t = x_A T \left[\delta_{n, n_A} - \frac{\beta}{2\alpha} (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1}) \right] \quad (4.32a)$$

$$S(t_c, f_n)\Delta t^2 = |x_A|^2 T \left[\delta_{n, n_A} + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1}) \right] \quad (4.32b)$$

$$P(t_c, f_n)\Delta t^2 = |x_A|^2 \left[\delta_{n, n_A} + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1}) \right] \quad (4.32c)$$

$$P(t_c)\Delta t^2 = |x_A|^2 \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right] \quad (4.32d)$$

となります.

矩形窓の結果 Eq. (4.19) と, コサイン窓の結果 Eq. (4.32) を見比べます. $n = n_A$ において, パワー以外の3つの量はそれぞれ一致しています. これは規格化の要望通りであり, 期待する結果です. しかし, この3つの量についてコサイン窓の結果には, 元々の信号には存在しない $n = n_A \pm 1$ の位置にも振幅があり, $n = n_A$ の振幅の両隣の周波数位置にも値を持っていることが分かります. これは窓関数の好ましくない影響であり, 元の信号を歪めてしまったために起こる仕方のない部分です.

パワーについてはこの両隣の周波数による影響のため, 本来の信号のパワーよりも $1 + (\beta/\alpha)^2$ 倍だけ大きく出てしまうことが分かります.

コサイン窓の一つであるハミング窓の場合で図示しますと, Fig. 4の青点のようになります. 上図にフーリエ変換結果, 下図にパワースペクトル密度を示しました. 図中の黒点は期待する値を示し, 赤点は前項で指摘した矩形窓で実施した結果を示しています.

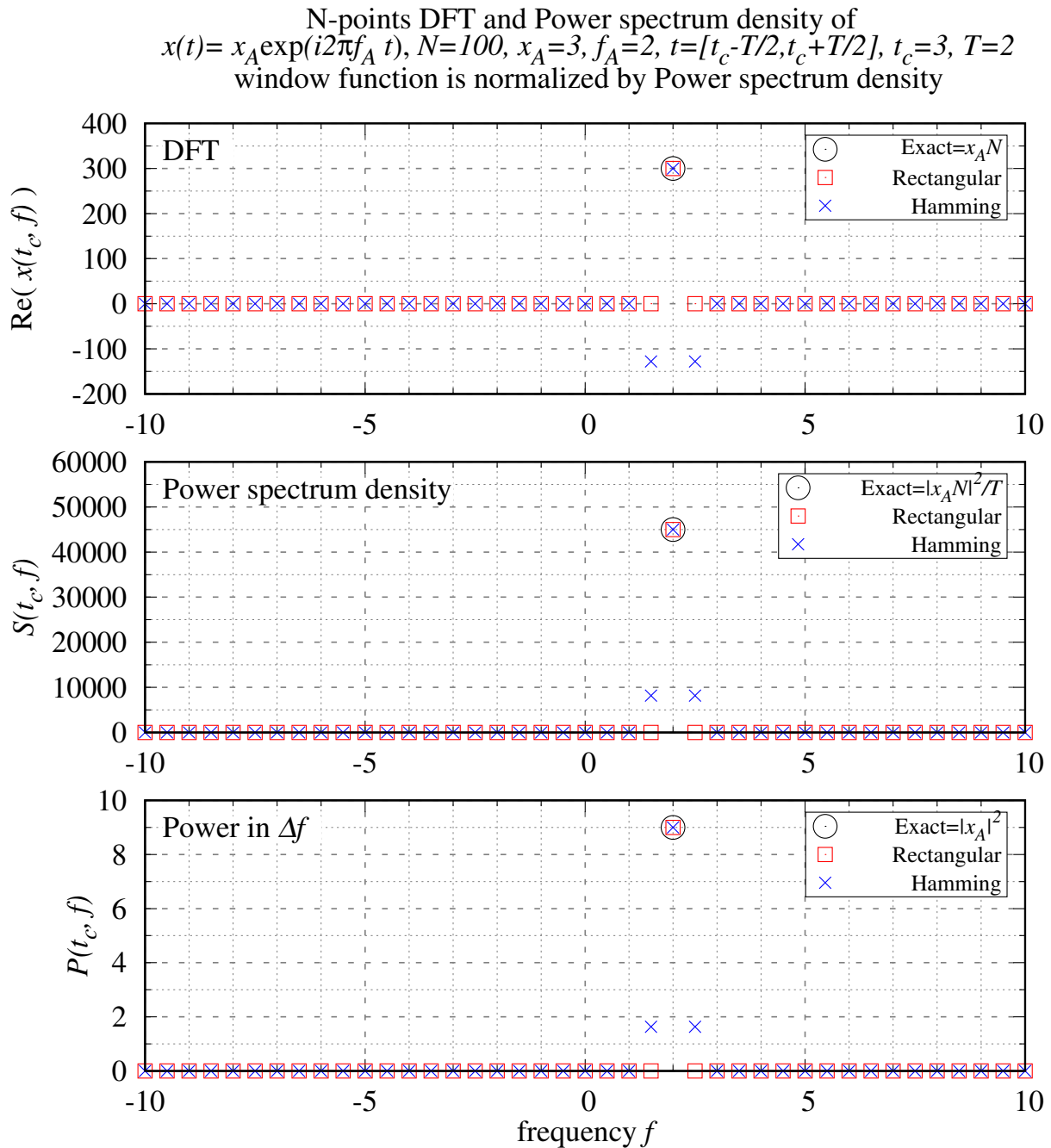


Figure 4: 単色信号に対して, パワースペクトル密度で窓関数を規格化した場合の離散フーリエ変換結果 (上), パワースペクトル密度 (中), 周波数幅に含まれるパワー (下). 計算パラメータは図中のタイトルに記載. $f = f_A$ における厳密なパワースペクトル密度の値は, Eq. (4.16) より $S(t_c, f_A) = 3^2 100^2 / 2 = 45000$. また, 信号のパワー $P\Delta t^2$ は矩形窓: 9.000, ハミング窓: 12.27.

4.2 パワーで規格化し、単色信号について計算する場合

Eq. (4.8a) と同じ信号で、パワーで規格化した場合の窓関数の影響を考えます。比較対象は矩形窓ではなく単色信号が無限に来た場合となります。これから、離散化しない場合 → 矩形窓 → コサイン窓の順でどのような違いが現れるか見ていきましょう。

4.2.1 無限区間の場合の解

無限区間で考える場合、パワースペクトル密度、パワーは、Eq. (2.13e), Eq. (2.16) より以下のようになります。

$$S(f) = |x_A|^2 \delta(f - f_A) \quad (4.33a)$$

$$P = |x_A|^2 \quad (4.33b)$$

4.2.2 矩形窓の場合

窓関数の規格化は、Eq. (3.18b) または離散化した Eq. (4.7b) に従って実施されます。矩形窓の場合、

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |w_{\text{rect}}(t)|^2 dt = 1 \quad (4.34a)$$

$$\rightarrow c = e^{i\theta} \quad (4.34b)$$

と規格化定数が求められます。ここで θ は任意の実数で意味はないので $\theta = 0$ に選びます。すると窓関数は以下の通りに決まります。

$$w_{\text{rect}}(t) = \begin{cases} 1, & (-T/2 \leq t \leq T/2) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.35)$$

矩形窓の場合、結局節 4.1 の規格化と同じですので、離散化した際のフーリエ変換の定義の違い Δt を考慮するとパワースペクトル密度、周波数幅に含まれるパワー、パワーは Eq. (4.16) の結果を利用して

$$S(t_c, f_n) \Delta t^2 = |x_A|^2 T \delta_{n, n_A} \quad (4.36a)$$

$$P(t_c, f_n) \Delta t^2 = |x_A|^2 \delta_{n, n_A} \quad (4.36b)$$

$$P(t_c) \Delta t^2 = |x_A|^2 \quad (4.36c)$$

となります。

矩形窓の場合の結果を図示しますと、Fig. 5 の赤点のようになります。Fig. 5 の上図に矩形窓を適用した場合のフーリエ変換結果、下図にパワースペクトル密度を示しました。

図中の黒点は期待する値を示し, 赤点はこれから実施するコサイン窓の一つであるハミング窓で実施した結果を示しています.

4.2.3 矩形窓ではない場合

続いて節 4.1 と同様にコサイン窓で考えます. 区間 $[a, b]$ のコサイン窓を再掲すれば

$$w(t) = \alpha - \beta \cos\left(2\pi \frac{t-a}{b-a}\right), (a \leq t \leq b) \quad (4.37)$$

となりますので $(\beta = 1 - \alpha)$, パワーによる規格化に必要な絶対値二乗の積分結果は

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_a^b |w(t)|^2 dt \quad (4.38a)$$

$$= \frac{1}{T} \int_a^b \left[\alpha - \beta \cos\left(2\pi \frac{t-a}{b-a}\right) \right]^2 dt \quad (4.38b)$$

$$= \alpha^2 + \frac{\beta^2}{2} \quad (4.38c)$$

となります. つまり, パワーで規格化されたコサイン窓を $w''(t)$ と書けば, それは

$$w''(t) = \frac{1}{(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2})^{1/2}} \left[\alpha - \beta \cos\left(2\pi \frac{t-a}{b-a}\right) \right], (a \leq t \leq b) \quad (4.39)$$

となります. フーリエ変換結果は Eq. (4.28) の結果と定数倍しか変わらないことを利用して両者の比だけを掛け合わせれば,

$$x(t_c, f_n) = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2})^{1/2}} \cdot x_{AN} \left[\delta_{n, n_A} - \frac{\beta}{2\alpha} (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1}) \right] \quad (4.40a)$$

$$= \alpha' x_{AN} [\delta_{n, n_A} - \beta' (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1})] \quad (4.40b)$$

を得ます. ここで, 更なる略記のために $\alpha' = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2})^{1/2}}, \beta' = \frac{\beta}{2\alpha}$ と置きました. パワースペクトル密度 $S(t_c, f_n)$ は

$$S(t_c, f_n) = \frac{|x_{AN}|^2}{T} \cdot |\alpha'|^2 \left[\delta_{n, n_A} + |\beta'|^2 (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1}) \right] \quad (4.41)$$

と書けます. $n = n_A$ の場合のパワースペクトル密度は $\frac{|x_{AN}|^2}{T} \cdot |\alpha|^2$ となります. 矩形窓の場合と係数 $|\alpha|^2$ 倍¹⁴ だけ異なるので, 矩形窓のパワースペクトル密度よりも小さくなってしまふことが分かります. これは, 窓関数を作用させた後に全ての周波数に生じるパワースペクトル密度を合計した場合で規格化を実施していますので, 異なって現れるのは当然の結果となります.

¹⁴ハミング窓の場合 $|\alpha|^2 \approx 0.734$, ハニング窓の場合 $|\alpha|^2 \approx 0.667$

では本命であるパワーを計算してみましょう。こちらを一致させるように窓関数を規格化しているため、一致しているはずですが、実際に計算してみますと

$$P(t_c) = \int_{-\infty}^{\infty} df S(t_c, f) \quad (4.42a)$$

$$\xrightarrow{\text{離散化}} \sum_{n=0}^{N-1} S(t_c, f_n) \Delta f \quad (4.42b)$$

$$= \frac{|\alpha' x_A N|^2}{NT^2} \sum_{n=0}^{N-1} [\delta_{n, n_A} + |\beta'|^2 (\delta_{n, n_A-1} + \delta_{n, n_A+1})] \quad (4.42c)$$

$$= |x_A|^2 \frac{N^2}{T^2} \cdot |\alpha'|^2 (1 + 2|\beta'|^2) \quad (4.42d)$$

$$= |x_A|^2 \frac{N^2}{T^2} \quad (4.42e)$$

となります。パワーも離散化に伴う違い Δt^2 を考慮すれば

$$P(t_c) \Delta t^2 = |x_A|^2 \quad (4.43)$$

となり、確かに Eq. (4.43) の結果は矩形窓の結果 Eq. (4.36c), 無限区間の場合とも一致します。期待通りの結果となることが確認できました。

コサイン窓の一つであるハミング窓の場合で図示しますと、Fig. 5 の赤点のようになります。上図にフーリエ変換結果、下図にパワースペクトル密度を示しました。図中の黒点は期待する値を示し、青点は前項で指摘した矩形窓で実施した結果を示しています。

N-points DFT and Power spectrum density of
 $x(t) = x_A \exp(i2\pi f_A t)$, $N=100$, $x_A=3$, $f_A=2$, $t=[t_c-T/2, t_c+T/2]$, $t_c=3$, $T=2$
 window function is normalized by Power

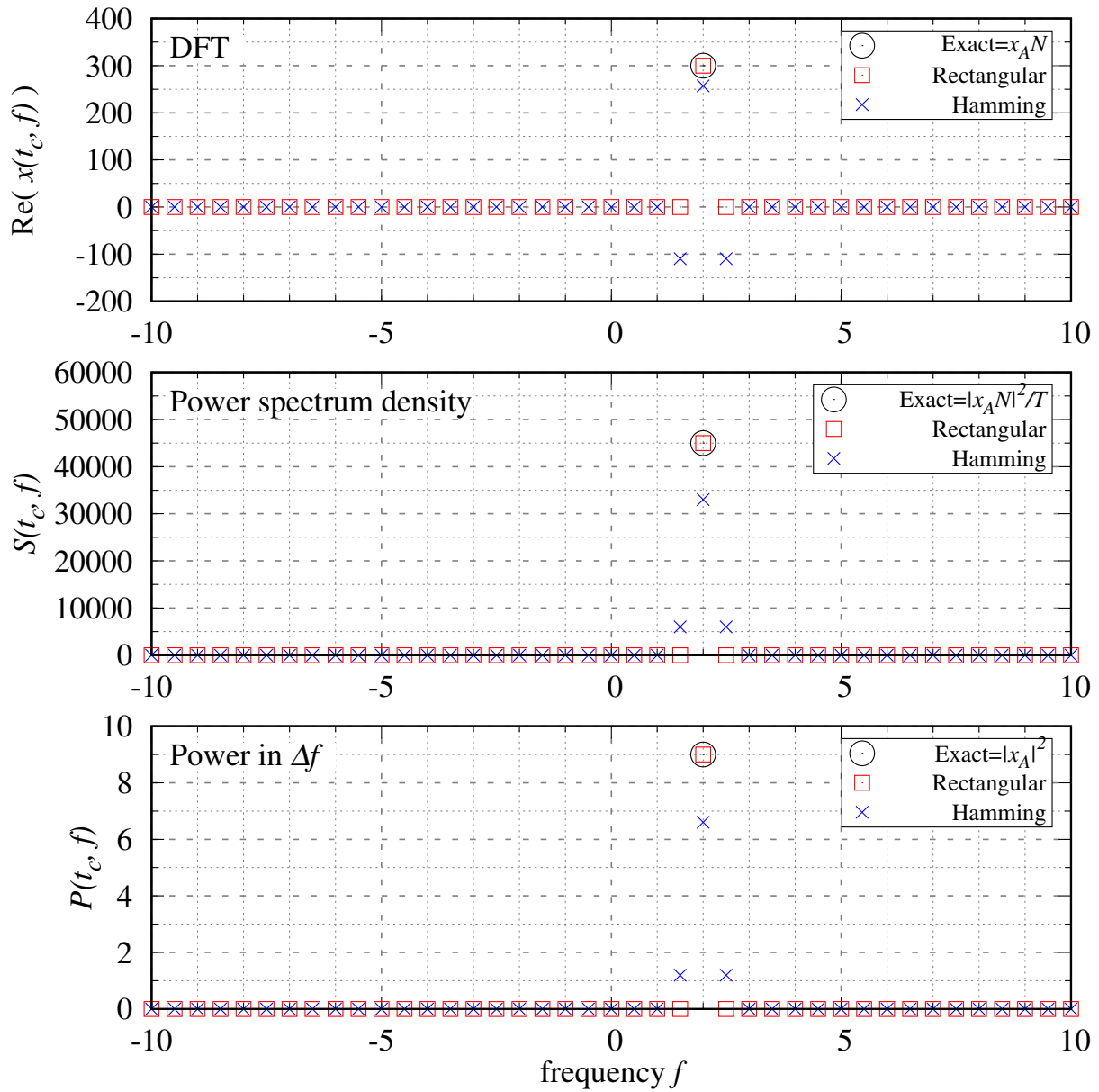


Figure 5: 単色信号に対して、パワーで窓関数を規格化した場合の離散フーリエ変換結果 (上), パワースペクトル密度 (中), 周波数幅に含まれるパワー (下). 計算パラメータは図中のタイトルに記載. 信号のパワー $P\Delta t^2$ は矩形窓: 9.000, ハミング窓: 9.000.

4.3 ノイズを含む信号のパワースペクトル密度

パワースペクトル密度で規格化した場合で、単色信号 $x_A(t) = x_A e^{i2\pi f_A t}$ と白色ガウス雑音 $n(\sigma, t)$ から成る信号 $x(t)$ を考えます。つまり $x(t)$ は

$$x(t) = x_A(t) + n(\sigma, t) \quad (4.44)$$

で書けるとします。前節と同様、 $f_A = n_A \cdot \Delta f$ (n_A は整数) は離散化した周波数 Δf の整数倍に制限します。また σ は白色ガウス雑音の分散を意味します。窓関数が作用した信号は

$$x(t_c, t) = [x_A(t) + n(\sigma, t)]w(t - t_c) \quad (4.45)$$

です。白色雑音は自己相関関数で定義されるので、Eq. (4.45) のフーリエ変換を直接考えるのは難しいです。そのため、自己相関関数からパワースペクトル密度を計算します。まずは自己相関関数

$$R(t_c, \tau) = \frac{1}{T} \int_{t_c - T/2}^{t_c + T/2} x^*(t_c, t) x(t_c, t + \tau) dt \quad (4.46)$$

を計算すると

$$R(t_c, \tau) = \frac{1}{T} \int_{t_c - T/2}^{t_c + T/2} x^*(t_c, t) x(t_c, t + \tau) dt \quad (4.47a)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_c - T/2}^{t_c + T/2} [x_A^*(t) + n^*(\sigma, t)] w^*(t - t_c) \cdot [x_A(t + \tau) + n(\sigma, t + \tau)] w(t + \tau - t_c) dt \quad (4.47b)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_c - T/2}^{t_c + T/2} x_A^*(t) x_A(t + \tau) w^*(t - t_c) w(t + \tau - t_c) dt + \sigma^2 \delta(\tau) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w^*(t) w(t + \tau) dt \quad (4.47c)$$

$$= \left(|x_A|^2 e^{i2\pi f_A \tau} + \sigma^2 \delta(\tau) \right) \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w^*(t) w(t + \tau) dt \quad (4.47d)$$

$$= \left(|x_A|^2 e^{i2\pi f_A \tau} + \sigma^2 \delta(\tau) \right) \cdot \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w^*(t) w(t + \tau) dt \quad (4.47e)$$

となります。ここで Eq. (4.47b) から Eq. (4.47c) に至るまでに、Eq. (2.36) の関係式を使用しています。

Eq. (4.47e) をフーリエ変換すればパワースペクトル密度が求められますので実施しま

すと

$$S(t_c, f) \quad (4.48a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(t_c, \tau) e^{-i2\pi f\tau} \quad (4.48b)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(|x_A|^2 e^{i2\pi f_A \tau} + \sigma^2 \delta(\tau) \right) \cdot \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt w^*(t) w(t + \tau) e^{-i2\pi f\tau} \quad (4.48c)$$

$$= |x_A|^2 \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dt w^*(t) w(t + \tau) e^{-i2\pi(f-f_A)\tau} + \sigma^2 \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt \quad (4.48d)$$

$$= |x_A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt w^*(t) e^{i2\pi(f-f_A)t} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau w(\tau) e^{-i2\pi(f-f_A)\tau} + \sigma^2 \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt \quad (4.48e)$$

$$= |x_A|^2 T \cdot \left| \frac{1}{T} w(f - f_A) \right|^2 + \sigma^2 \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt \quad (4.48f)$$

となります。

Eq. (4.48f) の第一項の結果は Eq. (3.28b) の結果に一致するため、純粋な単色信号に由来する結果となります。この項は周波数 $f = f_A$ 周りにのみ値を持ち、 $f = f_A$ においてノイズが全くないときの結果と一致します。また第二項は Eq. (2.33) に比例した結果になり、周波数に依存しないことが分かります。こちらはノイズから由来する項であり、第一項と分離できています。つまり単色信号の結果とノイズ成分は直交しており、それぞれ区別できることを意味しています。また、周波数幅に含まれるパワー $P(t_c, f)$ は

$$P(t_c, f) = |x_A|^2 \left| \frac{1}{T} w(f - f_A) \right|^2 + \frac{\sigma^2}{T} \cdot \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt \quad (4.49)$$

と書くことができます。

続いて離散化した場合を考えてみましょう。離散化した自己相関関数 $R_d(t_c, \tau)$ を求めたから、離散化した場合のパワースペクトル密度 $S_d(t_c, f_n)$ を考えてみます。

$$R(t_c, \tau) = \frac{1}{T} \int_{t_c - T/2}^{t_c + T/2} x^*(t_c, t) x(t_c, t + \tau) dt \quad (4.50)$$

を $t = [t_a, t_b]$ の区間で考えて

$$t = t_m = m\Delta t + t_a, \quad (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (4.51a)$$

$$t_b = N\Delta t + t_a, \quad t_c = t_a + \frac{N}{2}\Delta t \quad (4.51b)$$

のように離散化すると

$$R_d(t_c, \tau) \approx \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=0}^{N-1} x^*(t_c, t_m) x(t_c, t_m + \tau) \Delta t \quad (4.52a)$$

= (途中省略)

$$\approx |x_A|^2 e^{j2\pi f_A \tau} g(t_c, \tau) + N\sigma^2 \delta_{\tau,0} \left[\frac{1}{N} |w(t_m - t_c)|^2 \right] \quad (4.52b)$$

となります。ここで

$$g(t_c, \tau) \equiv \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w^*(t_m - t_c) w(t_m - t_c + \tau) \quad (4.53)$$

と置き、更に Eq. (2.36) の離散化である

$$\sum_m f(t_m) n(\sigma, t_m + \tau) \approx 0 \quad (4.54a)$$

$$\sum_m f(t_m) n^*(\sigma, t_m) n(\sigma, t_m + \tau) \approx N \sigma^2 \delta_{\tau,0} \sum_m f(t_m) \quad (4.54b)$$

の関係があるだろうとして計算しました。数値計算では Eq. (4.54) は正確に成り立つ訳ではありませんが、統計的にはこの値になるはずです。パワースペクトル密度 $S_d(t_c, f_n)$ を得るために Eq. (4.52b) を離散フーリエ変換の定義に従って実施すれば

$$e^{i2\pi f_n t_a} S_d(t_c, f_n) = \sum_{k=0}^{N-1} R_d(t_c, \tau_k) e^{-i2\pi f_n \tau_k} \quad (4.55a)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(|x_A|^2 g(t_c, \tau_k) e^{-i2\pi(f_n - f_A)\tau_k} + N \sigma^2 \delta_{\tau_k,0} \left[\frac{1}{N} |w(t_m - t_c)|^2 \right] e^{-i2\pi f_n \tau_k} \right) \quad (4.55b)$$

$$= e^{i2\pi f_n t_a} \left(|x_A|^2 g(t_c, f_n - f_A) + N \sigma^2 \left[\frac{1}{N} |w(t_m - t_c)|^2 \right] \right) \quad (4.55c)$$

となります。ここで

$$g(t_c, f) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} g(t_c, \tau_k) e^{-i2\pi f \tau_k} \quad (4.56)$$

を定義しました。見通しをよくするために、特に矩形窓 $w(t) = 1$ を考えますと、

$$S_d(t_c, f_n) = N |x_A|^2 \delta_{n,A} + \sigma^2 \quad (4.57)$$

と求められます。ここで $f_A = \Delta f \cdot A$ (A は整数) を想定して計算を進めました。

さてここから本当に欲しい量である、連続として扱った場合との差を調べていきます。自己相関関数を定義してから離散フーリエ変換をする場合、Eq. (4.48b) を1回だけフーリエ変換しているのでこれを連続フーリエ変換に戻すには離散フーリエ変換との差である Δt を掛ける必要があります。つまり、

$$S_d(t_c, f_n) \Delta t = |x_A|^2 N \Delta t \delta_{n,A} + \sigma^2 \Delta t \quad (4.58)$$

が Eq. (4.48f) と比較可能な表記となります。また、周波数幅に含まれるパワー $P_d(t_c, f_n)$ は

$$P_d(t_c, f_n) = [S_d(t_c, f_n) \Delta t] \Delta f = S_d(t_c, f_n) \frac{1}{N} \quad (4.59a)$$

$$= |x_A|^2 \delta_{n,A} + \frac{1}{N} \sigma^2 \quad (4.59b)$$

となります¹⁵.

多くの応用では, Δt , すなわち時間軸上のデータ点を取得する間隔 (サンプリングレート) は変化させません. そのため,

$$P_d(t_c, f_n) = |x_A|^2 \delta_{n,A} + \sigma^2 \Delta t \cdot \Delta f \quad (4.60)$$

と表記して, Δt を定数と考えます. ここで第一項は連続項に由来する項であり, 測定時のパラメータ¹⁶ に依存せず, 離散化しても変わらないことを意味しています. ノイズに由来する第二項は, 測定時のパラメータ Δf に比例していることが分かります. よって, Δf を非常に小さくする¹⁷ ことでいくらかでも小さくすることができます. もう少し具体的に言えば, Δf を 1/10 倍にすることでノイズに由来する振幅も 1/10 倍小さくなるということです.

いくらかでもノイズ成分が小さくなる, とは言いましてもこれは理想的な場合で, Δf を無限に小さくできるならば, という条件が付きます. $\Delta f \rightarrow 0$ すなわち $T \rightarrow \infty$ ですので, 実用上では無限の時間で信号を測定出来て, 無限にその離散データを保持しておけるか? ということが問題になります. 減らせるにも限界があるわけですね. この問題については本稿では深く触れませんので各々お調べになってください.

さて, 最後に信号全体のパワー $P(t_c)$ も計算しておきましょう. Eq. (4.60) を全離散点について和をとればよいので,

$$P(t_c) = \sum_{n=0}^{N-1} P_d(t_c, f_n) \quad (4.61a)$$

$$= |x_A|^2 + \sigma^2 \quad (4.61b)$$

となり, こちらは物理的な量だけで記述できており, 有限な値に収まることも確認できます.

Fig. 6, 7, 8 に, Eq. (4.45) の信号について実際に数値計算をした例を示します. Eq. (4.60) のように, 数値計算のパラメータである Δt を固定して N を増加させた場合, ノイズの振幅が N に比例して減少することが分かります. 具体的には Fig. 6, 7, 8 に変わるにつれて, N を 10 倍ずつ変化させた時 (つまり, Δf を 1/10 倍ずつ変化), ノイズの振幅が 1/10 倍になっていることが分かります.

¹⁵注意しておきたい点は, 信号のフーリエ変換を通じてパワースペクトル密度を計算した場合, 離散フーリエ変換が 2 回実施されてパワースペクトル密度となるので Δt^2 で割る必要がある点です.

¹⁶つまり純粋な物理量ではないことを指します. ここでは x_A, f_A などは純粋な物理量, $\Delta t, \Delta f, N$ などを純粋ではない量として呼んでいます.

¹⁷つまり, 測定時間 T を非常に大きくすることに相当します.

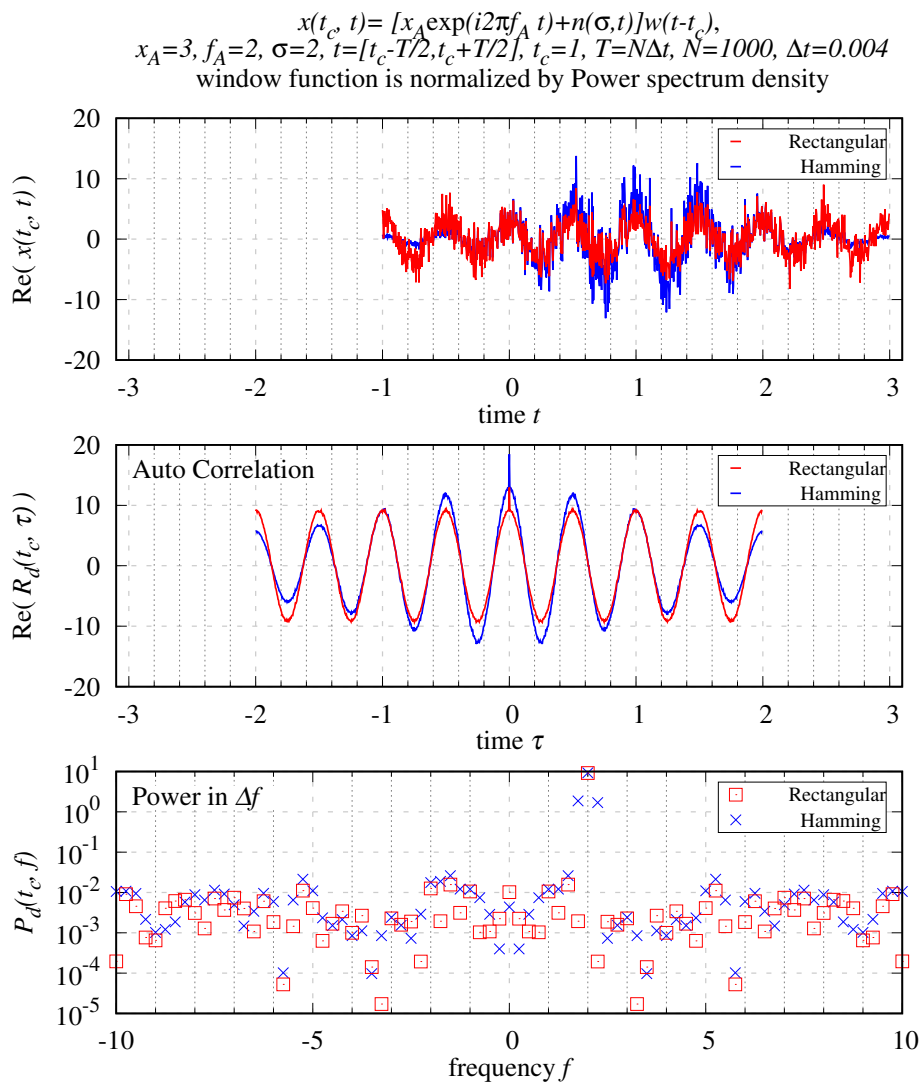


Figure 6: 単色信号とノイズを含む信号 (4.45) の実部 (上), 自己相関関数 (中), 周波数当たりのパワー (下) の様子. Δt を固定し $N = 1000$ として計算. その他計算パラメータは図中のタイトルに記載. ノイズの振幅値はおよそ $\sigma^2/N \approx 4 \times 10^{-3}$.

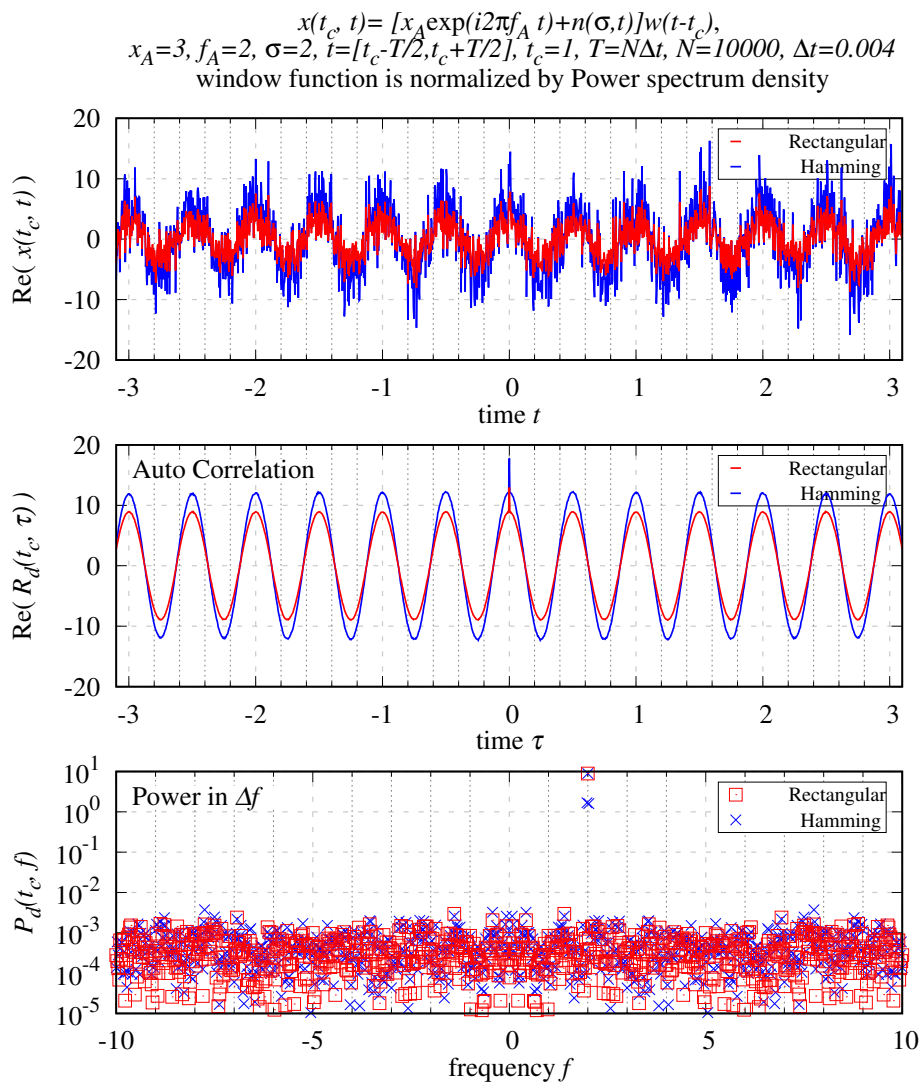


Figure 7: Fig. 6 と同様. ただし Δt を変えずに $N = 10000$ として計算. その他計算パラメータは図中のタイトルに記載. ノイズの振幅値はおおよそ $\sigma^2/N \approx 4 \times 10^{-4}$.

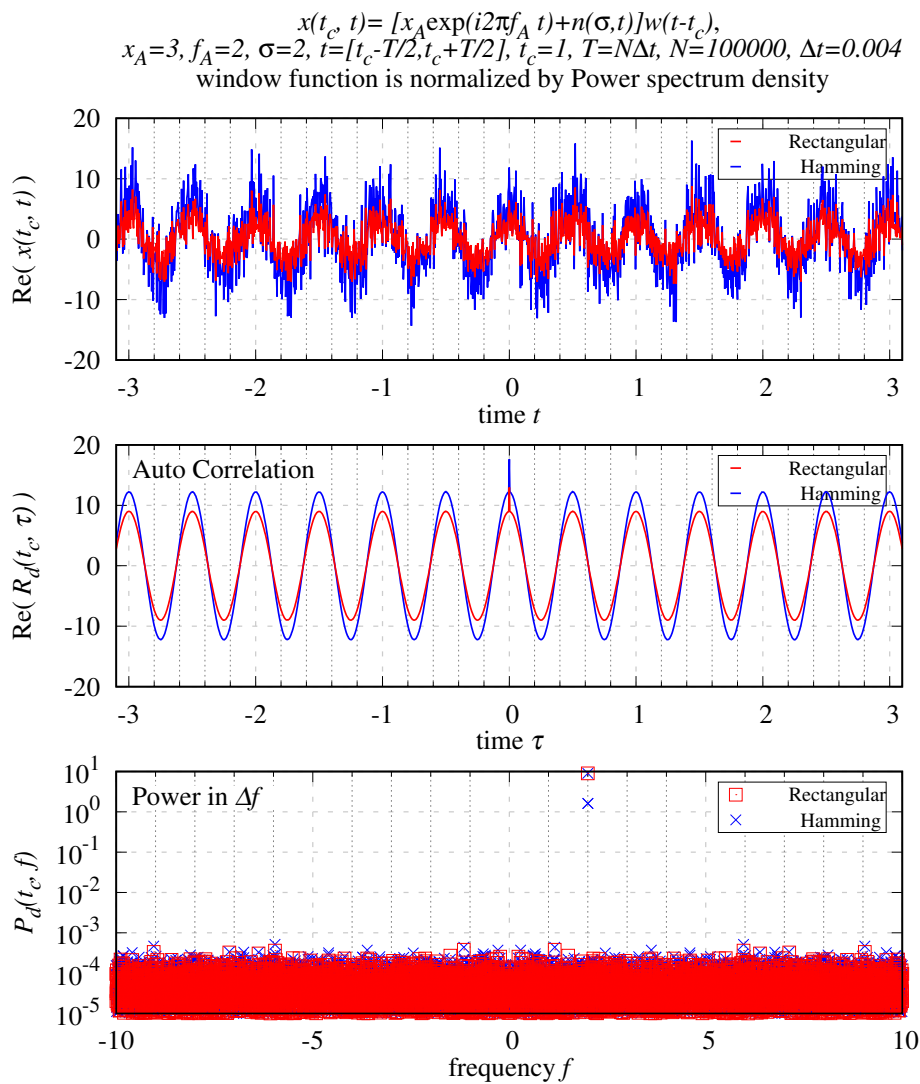


Figure 8: Fig. 6 と同様. ただし Δt を変えずに $N = 100000$ として計算. その他計算パラメータは図中のタイトルに記載. ノイズの振幅値はおおよそ $\sigma^2/N \approx 4 \times 10^{-5}$.

A パーセバルの定理の証明

絶対値二乗の関数を積分する問題があったとして、その積分の積分変数を共役な変数に入れ替えた場合を考えます。

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{A.1})$$

フーリエ変換を以下のように定義します。

$$\left\{ \begin{array}{l} x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f)e^{i2\pi ft} df \end{array} \right. \quad (\text{A.2a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f)e^{i2\pi ft} df \end{array} \right. \quad (\text{A.2b})$$

Eq. (A.1) に代入すれば、

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dt |x(t)|^2 \quad (\text{A.3})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t)x^*(t) \quad (\text{A.4})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} df x(f)e^{i2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} df' x^*(f')e^{-i2\pi f't} \quad (\text{A.5})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f)x^*(f') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i2\pi(f-f')t} \quad (\text{A.6})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' x(f)x^*(f')\delta(f-f') \quad (\text{A.7})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df |x(f)|^2 \quad (\text{A.8})$$

となります。

B フーリエ変換・離散フーリエ変換の定義

本稿のフーリエ変換・離散フーリエ変換は以下の通りに定義しています。

フーリエ変換

$$\begin{cases} x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt & \text{(B.1a)} \\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f)e^{i2\pi ft} df & \text{(B.1b)} \end{cases}$$

位置

$$t = [-\infty, \infty] \quad \text{(B.2a)}$$

波数

$$f = [-\infty, \infty] \quad \text{(B.3a)}$$

畳み込み

$$(x * y)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \quad \text{(B.4a)}$$

$$\begin{aligned} (x * y)(f) &\equiv \mathcal{F}[(x * y)(t)](f) \\ &= x(f)y(f) \end{aligned} \quad \text{(B.4b)}$$

離散フーリエ変換

$$\begin{cases} e^{i2\pi f_n t_a} x(f_n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(t_m)e^{-i2\pi nm/N} & \text{(B.5a)} \\ x(t_m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(f_n)e^{i2\pi f_n t_a}] e^{i2\pi nm/N} & \text{(B.5b)} \end{cases}$$

位置

$$t = [t_a, t_a + T] \quad \text{(B.6a)}$$

$$t_m = m\Delta t + t_a, (m = 0, 1, \dots, N - 1) \quad \text{(B.6b)}$$

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{1}{F} \quad \text{(B.6c)}$$

波数

$$f = [0, F], \quad \text{(B.7a)}$$

$$f_n = n\Delta f, (n = 0, 1, \dots, N - 1) \quad \text{(B.7b)}$$

$$\Delta f = \frac{F}{N} = \frac{1}{T}, \quad \text{(B.7c)}$$

$$\Delta t \Delta f = \frac{1}{N}, \quad FT = N \quad \text{(B.8)}$$

$$x(t_m \pm T) = x(t_m), \quad x(f_m \pm F) = x(f_n) \quad \text{(B.9)}$$

畳み込み

$$(x * y)_d(t_m) \equiv \sum_l x(t_l)y(t_m - t_l) \quad \text{(B.10a)}$$

$$\begin{aligned} (x * y)_d(f_n) &\equiv \mathcal{F}[(x * y)_d(t)](f_n) \\ &= x(f_n)y(f_n) \end{aligned} \quad \text{(B.10b)}$$

ここで、離散フーリエ変換に現れる $x(t_m), x(f_n)$ は、フーリエ変換の $x(t), x(f)$ と複素数で比較できる量です。

C プログラム

以下のプログラムは完全なものではありません。すべてを載せると非常に多くなるので、重要そうな部分のみを載せています。全てのプログラムは以下の url に置きましたので、プログラムが欲しい方はこちらをご参考ください。

https://slpr.sakura.ne.jp/qp/supplement_data/signal/signal_spectrum.tar.gz

Listing 1: caption here

```

1 program main
2   implicit none
3   double precision::width
4   double precision::tc
5   double precision,external::wfunc
6   complex(kind(0d0)),external::signalx
7
8   integer::n,m
9   double precision::dt,Trange,ta,tb
10  double precision,allocatable::t(:)
11  double precision::df,Frangle
12  double precision,allocatable::f(:)
13  double precision::Prect
14  double precision::Pwindow
15  integer::Np
16  complex(kind(0d0)),allocatable::x(:)
17  complex(kind(0d0)),allocatable::xrect(:)
18
19  width = 2d0
20  call prepare_window(width,"PowerSpectrum")
21  !call prepare_window(width,"Power")
22
23  Np = 100 ! Number of DFT points
24
25  ! Initialize and allocation for DFT
26  allocate(t(0:Np-1),f(0:Np-1),x(0:Np-1))
27  t = 0d0
28  f = 0d0
29  x = dcplx(0d0,0d0)
30
31  allocate(xrect(0:Np-1))
32  xrect=0d0
33
34  tc = 3d0 ! window center
35
36  Trange = width
37  ta = tc - Trange/2d0
38  tb = tc + Trange/2d0
39
40  ! Define position t
41  dt = Trange / Np
42  call dft_abscissa_shift(Np, t, dt, ta) ! x=[xa, xa + Xrange]
43
44  ! Calculate f abscissa
45  Frangle = 1d0/dt
46  df = Frangle / Np
47  call dft_abscissa(Np, f, df) ! k=[0, Krange]
48
49  ! Calculate function x at t=t(m)
50  do m = 0,Np-1
51    xrect(m) = signalx(t(m))
52    x(m) = signalx(t(m))*wfunc(tc,t(m))
53  enddo
54
55  ! Write down f(x)
56  call dft_write("before_xrect.d",Np,t,xrect)
57  call dft_write("before_x.d",Np,t,x)
58
59  ! Forward dft
60  call dft(Np,xrect,"forward")
61  call dft(Np,x,"forward")
62
63  ! Write down f(k)
64  ! output f=[-Frangle/2,Frangle/2]

```

```
65 call dft_writefk_center0_shift("xfrect.d",Np,f,xrect,ta)
66 call dft_writefk_center0_shift("xf.d",Np,f,x,ta)
67
68 call dft_write_power("xfpower_rect.d",Np,f,xrect,ta,Trange)
69 call dft_write_power("xfpower.d",Np,f,x,ta,Trange)
70
71 Prect = 0d0
72 Pwindow = 0d0
73 call signal_power(Np,xrect,df,Prect)
74 call signal_power(Np,x,df,Pwindow)
75 write(6,*)"Power Rectangular: ", Prect
76 write(6,*)"Power Hamming : ", Pwindow
77
78 ! Backward dft
79 call dft(Np,x,"backward")
80 ! Write down x(t)
81 call dft_write("after_fx.d",Np,t,x)
82
83 stop
84 end program main
85
86 complex(kind(0d0)) function signalx(t)
87 implicit none
88 double precision,intent(in)::t
89
90 complex(kind(0d0))::xc
91 double precision::fc
92 double precision,parameter::pi=dacos(-1d0)
93
94 xc=dcmplx(3d0,0d0)
95 fc=dcmplx(2d0,0d0)
96 signalx = xc * exp(dcmplx(0d0,1d0)*2d0*pi*fc*t)
97
98 return
99 end function signalx
100
101 module window_mod
102 implicit none
103 double precision::width = 0d0
104 double precision::normconst = 1d0
105 end module window_mod
106
107 subroutine prepare_window(wid,winType)
108 use window_mod
109 implicit none
110 double precision,intent(in)::wid
111 character(*),intent(in)::winType
112
113 integer::i
114 integer,parameter::Ng=9
115 double precision::xg(1:Ng),wg(1:Ng),xt,a,b,s
116 double precision,external::wfunc
117
118 width = wid
119
120 call gauss_abscissa9(xg,wg)
121 a=0d0
122 b=width
123 s=0d0
124 if(trim(winType).eq."PowerSpectrum")then
125 do i=1,Ng
126 xt = (b-a)*xg(i)*0.5d0 + (a+b)*0.5d0
127 s = s + wg(i) * wfunc((a+b)*0.5d0,xt)
128 enddo
129 s = s*(b-a)*0.5d0/width
130 normconst = s
131 elseif(trim(winType).eq."Power")then
132 do i=1,Ng
133 xt = (b-a)*xg(i)*0.5d0 + (a+b)*0.5d0
134 s = s + wg(i) * wfunc((a+b)*0.5d0,xt)**2
135 enddo
136 s = s*(b-a)*0.5d0/width
137 normconst = sqrt(s)
138 else
139 write(6,*)"Undefined window type, stop"
140 stop
141 endif
142
143 !write(6,*)s," norm"
144
145 return
```

```

146 end subroutine prepare_window
147
148 double precision function wfunc(t0,t)
149   use window_mod
150   implicit none
151   double precision,intent(in)::t0,t
152   double precision,parameter::pi=dacos(-1d0)
153   double precision::a,b
154
155   ! x=[a,b]
156   a = t0 - width*0.5d0
157   b = t0 + width*0.5d0
158   if(t.lt.a.or.t.gt.b)then
159     wfunc = 0d0
160   else
161     ! Hanning window
162     wfunc = 0.54d0-0.46d0*cos(2d0*pi*(t-a)/(b-a))
163     wfunc = wfunc/normconst ! Normalize constant
164   endif
165
166   return
167 end function wfunc
168
169 subroutine gauss_abcissa9(x,w)
170   implicit none
171   double precision,intent(out)::x(1:9),w(1:9)
172
173   x(1)=-0.9681602395076260898356d0
174   x(2)=-0.8360311073266357942994d0
175   x(3)=-0.6133714327005903973087d0
176   x(4)=-0.3242534234038089290385d0
177   x(5)=0d0
178   x(6)=-x(4)
179   x(7)=-x(3)
180   x(8)=-x(2)
181   x(9)=-x(1)
182
183   w(1)=0.0812743883615744119719d0
184   w(2)=0.1806481606948574040585d0
185   w(3)=0.2606106964029354623187d0
186   w(4)=0.312347077040002840069d0
187   w(5)=0.330239355001259763165d0
188   w(6)=w(4)
189   w(7)=w(3)
190   w(8)=w(2)
191   w(9)=w(1)
192
193   return
194 end subroutine gauss_abcissa9
195
196 subroutine dft_write_power(fname,N,k,f,xa,Xrange)
197   implicit none
198   character(*),intent(in)::fname
199   integer,intent(in)::N
200   double precision,intent(in)::k(0:N-1),xa,Xrange
201   complex(kind(0d0)),intent(in)::f(0:N-1)
202
203   ! k = [0,K]
204   ! k(0) = 0
205   ! --> output range k=[-K/2,K/2]
206   integer::nn,Nhalf
207   double precision::dk,Krange,powerspectrum
208   complex(kind(0d0))::tmp
209   double precision,parameter::pi=dacos(-1d0)
210
211   if(mod(N,2)==0)then
212     Nhalf = N/2
213   else
214     Nhalf = (N-1)/2
215   endif
216
217   dk = abs(k(1)-k(0))
218   Krange = N*dk
219
220   open(21,file=trim(fname))
221   do nn = Nhalf,N-1
222     tmp = exp(dcmplx(0d0,2d0*pi*k(nn)*xa))*f(nn)
223     powerspectrum = abs(tmp)**2/Xrange
224     write(21,'(3e26.16e3)')k(nn)-Krange,powerspectrum
225   enddo
226   do nn = 0,Nhalf-1

```

```
227     tmp = exp(dcmplx(0d0,2d0*pi*k(nn)*xa))*f(nn)
228     powerspectrum = abs(tmp)**2/Xrange
229     write(21,'(3e26.16e3)')k(nn),powerspectrum
230 enddo
231 close(21)
232
233 return
234 end subroutine dft_write_power
235
236 subroutine signal_power(N,fk,dk,power)
237 implicit none
238 integer,intent(in)::N
239 double precision,intent(in)::dk
240 complex(kind(0d0)),intent(in)::fk(0:N-1)
241 double precision,intent(out)::power
242 ! fk : Fourier transform of f(x)
243 ! dk : Discrete interval of k (namely \Delta k), \Delta k = 1/X
244 integer::i
245 double precision::s,tmp
246
247 s = 0d0
248 do i = 0,N-1
249     tmp=abs(fk(i))
250     s = s + tmp*tmp
251 enddo
252 power = s*dk*dk
253
254 return
255 end subroutine signal_power
256
257 include "/home/sikino/mkl/include/mkl_dfti.f90"
258 subroutine dft(N,f,FB)
259 use MKL_DFTI
260 implicit none
261 integer,intent(in)::N
262 complex(kind(0d0)),intent(inout)::f(0:N-1)
263 character(*),intent(in)::FB
264 !
265 !sikinote
266 ! author : sikino
267 ! date : 2022/06/11
268 !
269 !n: Number of DFT points.
270 !f(i): value of data at i
271 !FB: "forward" -> Forward DFT
272 ! "backward" -> Backward DFT
273 integer::Status
274 TYPE(DFTI_DESCRIPTOR),POINTER::hand
275
276 Status = DftiCreateDescriptor(hand,DFTI_DOUBLE,DFTI_COMPLEX,1,N)
277 Status = DftiSetValue(hand,DFTI_FORWARD_SCALE,1d0)
278 Status = DftiSetValue(hand,DFTI_BACKWARD_SCALE,1d0/dble(N))
279 Status = DftiCommitDescriptor(hand)
280 if(trim(FB)=="forward")then
281     Status = DftiComputeForward(hand,f)
282 elseif(trim(FB)=="backward")then
283     Status = DftiComputeBackward(hand,f)
284 else
285     write(6,*)"DFT string different"
286     stop
287 endif
288 Status = DftiFreeDescriptor(hand)
289
290 return
291 end subroutine dft
```

Reference

- [1] スペクトル解析基礎 <https://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/takano/documents/SpectrumAnalysisMemo.pdf>
- [2] データを読み解くリテラシー <http://is-edge.naist.jp/Edge/2013/08/%E3%83%87%E3%83%BC%E3%82%BF%E3%82%92%E8%AA%AD%E3%81%BF%E8%A7%A3%E3%81%8F%E3%83%AA%E3%83%86%E3%83%A9%E3%82%B7%E3%83%BC/>
- [3] 第 5 章 自己相関関数とそのフーリエ変換 <https://ocw.nagoya-u.jp/files/47/lecnote05.pdf>
- [4] 田村晋司著, 『スペクトル理論による不規則振動の解析』 <https://ir.lib.shimane-u.ac.jp/files/public/4/49655/20200511154051190519/e10557pub.pdf>
- [5] 西森 秀稔, 森田 悟史著, 『量子アニーリングとその収束定理 (情報物理学の数学的構造)』 <https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/58954/1/1532-9.pdf>
- [6] ヒストグラム <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%92%E3%82%B9%E3%83%88%E3%82%B0%E3%83%A9%E3%83%A0>
- [7] 松野 孝一郎著, 『非線型非平衡系でのエルゴード問題 (非線型・非平衡状態の統計力学, 研究会報告)』 <https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/89139/1/KJ00004808405.pdf>
- [8] 秋元琢磨著, 『最近の研究から「エルゴード特性の解析による異常拡散の解明」』, https://www.jstage.jst.go.jp/article/mssj/15/4/15_237/_pdf/-char/ja
- [9] sinc 関数の二乗とディラックのデルタ関数の関係 https://staff.aist.go.jp/yoshizawa-akio/appendix_pdf/703_delta_141215.pdf
- [10] 柳田 康幸, 『正弦波信号の DFT によるスペクトル: 窓関数の形状と裾野』 <http://vrlab.meijo-u.ac.jp/~yanagida/edu/sinewave-dft-window.html>