直交多項式

シキノ *

January 19, 2022

Contents

1 クンマー (Kummer) の方程式 **2**

1.1 一般解 2

1.2 クンマー方程式の 8 つの解 2

1.3 Numerically Satisfactory Solutions 3

1.4 多項式解 4

2 ラゲールの微分方程式 **5**

2.1 ラゲールの陪多項式 5

2.2 ラゲール陪多項式のあらわな形 7

2.3 具体例 8

2.4 直交性 8

2.5 微分 8

*https://slpr.sakura.ne.jp/qp/, https://twitter.com/sikinote

1　クンマー (Kummer) の方程式

1.1　一般解

クンマーの方程式 [1] は、

$$\left[z\frac{d^2w}{dz^2}+(b-z)\frac{dw}{dz}-aw\right]=0 \tag{1}$$

の微分方程式 [1] で、一般解の一つは

$$w=c_1M(a,b,z)+c_2U(a,b,z),\quad (b\neq -n) \tag{2}$$

と書かれます [2]。それぞれの関数 [3] は、

$$\begin{aligned} M(a,b,z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(b)_k}\frac{z^k}{k!} \\ &= 1+\frac{a}{b}z+\frac{(a)_2}{(b)_2}\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{(a)_k}{(b)_k}\frac{z^k}{k!}+\cdots \qquad (3) \\ U(a,b,z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi b)}\left[\frac{M(a,b,z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)}-z^{1-b}\frac{M(1+a-b,2-b,z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)}\right] \qquad (4) \end{aligned}$$

となります。ここで、$M(a,b,z)$ はクンマー関数、$U(a,b,z)$ はトリコミ (Tricomi) 関数と呼ばれます。また、$\Gamma(z)$ はガンマ関数です。また、$(a)_n$ はポッホハマー記号 (Pochhammer symbol) で、

$$(a)_k=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \tag{5}$$

と書け、特に a,k が整数であるならば、

$$(a)_k=a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1),\quad (a)_0=1 \tag{6}$$

を意味します [1]Eq. (13.1.2)。

1.2　クンマー方程式の 8 つの解

少し注意しなければならないことがあります。クンマー方程式 Eq. (1) の解は Eq. (3) の 2 つのみではないということです。

二階の微分方程式なので、独立な解は 2 つあれば事足りるのですが、そうではなくなる状況が存在してしまいます。つまり、特定の a,b の組み合わせにおいて、

$$U(a,b,z)\propto M(a,b,z) \tag{7}$$

[1][1]Eq. (13.1.1)
[2][1]Eq. (13.1.11)
[3][1]Eq. (13.1.2), (13.1.3)

となることがあり得る、ということです。Eq. (1) の解としては 8 つが有名な解として知られており、それらは以下の通りの形を持ちます。もしも 2 つの解が比例してしまうことや、はっきりと区別できない組み合わせを選んでしまっていたのであれば、もう一つの解はほかの独立な解を選びましょう [4]。

$$
\begin{aligned}
w_1 &= M(a,b,z) && \text{(8a)}\\
w_2 &= z^{1-b}M(1+a-b,2-b,z) && \text{(8b)}\\
w_3 &= e^z M(b-a,b,-z) && \text{(8c)}\\
w_4 &= z^{1-b}e^z M(1-a,2-b,-z) && \text{(8d)}\\
w_5 &= U(a,b,z) && \text{(8e)}\\
w_6 &= z^{1-b}U(1+a-b,2-b,z) && \text{(8f)}\\
w_7 &= e^z U(b-a,b,-z) && \text{(8g)}\\
w_8 &= z^{1-b}e^z U(1-a,2-b,-z) && \text{(8h)}
\end{aligned}
$$

しかしながら、上記の中で

$$w_1 \propto w_3,\ w_2 \propto w_4,\ w_5 \propto w_6,\ w_7 \propto w_8 \tag{9}$$

となり、独立な解は本当は 4 つであることに注意しましょう [5]。

また、後程出てきますがこれらの形ではない場合も存在しますので、気に留めて置いてください。

1.3 Numerically Satisfactory Solutions

8 つの解が考えられると言いましたが、どの解の組み合わせが良いのでしょうか。こういった問題はクンマーの方程式に限らず、多くの場所で出てきています。シンプルな例を挙げてみます。有名な例では

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y \tag{10}$$

の問題でしょうか。これの有名な一般解は

$$y = Ae^x + Be^{-x} \tag{11}$$

ですが、

$$y = C\cosh(x) + D\sinh(x) \tag{12}$$

[4] [1]Eq. (13.1.12)-(13.1.19)

[5] [1]Eq. (13.1.21) では、二つの解のロンスキアンがゼロになることを示しており、これが独立ではないことを意味しています。

という解の形も存在します。どちらも正しい解です。正しいですが、どうせなら使いやすい方がいいですよね。どちらが便利か？を決める基準は、ある特定の領域（$z \to 0, z \to \pm\infty$ など）でしっかりと区別できる振る舞いを持つものを選ぶことです。良い区別ができる関数の組み合わせである場合、そのペアを *Numerically Satisfactory Solutions* と呼びます。上記例では、$x \to \infty$ において

$$e^{-x}\Big|_{x\to\infty} = 0, \quad e^{x}\Big|_{x\to\infty} = \infty \tag{13}$$

と分離できるため、$x \to \infty$ においてはほとんど e^x だけで表現できるのに対し、もう片方のペアは

$$\cosh(x)\Big|_{x\to\infty} = \infty, \quad \sinh(x)\Big|_{x\to\infty} = \infty \tag{14}$$

となり、どちらの解も注意深く扱い続けなければなりません[6]。上記の理由から、多くの解説では $e^{\pm x}$ が採用されています。

別の条件がもし存在するならば、$\sinh(x), \cosh(x)$ の方が便利な時もありますので、上手く見極めましょう。例えば $x \to 0$ の時に $y = 0$ である条件が課されていたとすると、この場合は

$$e^{-x}\Big|_{x\to 0} = 1, \quad e^{x}\Big|_{x\to 0} = 1 \tag{15}$$

$$\cosh(x)\Big|_{x\to 0} = 1, \quad \sinh(x)\Big|_{x\to 0} = 0 \tag{16}$$

となるので、sinh と cosh のペアを選ぶ方が良いということが分かります。

1.4 多項式解

さて先取りしてお話しますが、a, b が特別な値を取る際に $M(a, b, z)$ がラゲール陪多項式 (Associated Laguerre polynomials) になります。しかしながら、Eq. (3) を見ても無限和として表現されているだけであり、多項式とは言えません。これには特別な値 a が関係します。ラゲール陪多項式の場合、$a = -n$, (n は正の整数) の方程式となります。この場合に $(a)_k = (-n)_k$ を計算してみますと

$$(-n)_k = (-n)(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k-1) \tag{17}$$

となります。k に対する無限和は $k \to \infty$ に到達しますが、そのどこかで必ず $(-n+k-1) = 0$ となる k を通過します。この瞬間にそれ以降の k はゼロになるため、無限和が切れ多項式となり、最高次は $M(-n, b, x) \to z^n$ の関数となるのです。

[6] [2] § 2.7(iv) Numerically Satisfactory Solutions

2　ラゲールの微分方程式

ここでは、クンマー方程式で特別な引数の場合を考えます。ラゲール陪多項式は、ソニン多項式とも呼ばれます。どうやらソニン多項式と呼ぶのは古い文献においてそう呼ばれるようです [4]。

困ったことに、ラゲール陪多項式は流儀によって二種類存在します。メジャーなラゲール陪多項式はここで紹介するものですが、日本の文献のいくつかはメジャーなラゲール陪多項式をソニン多項式、別の定義がなされたものをラゲール陪多項式と呼んでいます。

Table 1: ラゲール陪多項式の違い

本稿のラゲール陪多項式	別のラゲール陪多項式
M. Abramowitz and I. A. Stegun[1]	日本語 wikipedia[5]
Wolfram MathWorld[4]	
NIST DLMF[2]	
英語 wikipedia[6]	
高田健次郎著, 量子力学 [8]	

他にも覚えておりませんが、日本語の文献で別のラゲール陪多項式を見た覚えがあります。注意しましょう。

2.1　ラゲールの陪多項式

ラゲール陪多項式は、クンマー方程式の特別な引数の場合のクンマー関数で、Eq. (1) の $a = -n, b = \alpha + 1$ の場合に相当します。ここで、n は 0 以上の整数、α は -1 以上の実数です。つまり、ラゲール陪多項式は、次のラゲールの微分方程式 [7]

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 - x)\frac{d}{dx} + n\right] f(x) = 0, \quad (\alpha > -1) \tag{18}$$

を満たす解の一つであり、その解は Eq. (3) より

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1' M(-n, \alpha+1, x) + c_2 U(-n, \alpha+1, x) && (19) \\ &= c_1 L_n^{(\alpha)}(x) + c_2 U(-n, \alpha+1, x) && (20) \end{aligned}$$

のどちらかの形を採用し、書き下すことができます。ここで、$L_n^{(\alpha)}(x)$ はラゲール陪多項式、$U(a, b, x)$ はトリコミ関数です。クンマー関数とラゲール陪多項式の間には定数倍の

[7] [1]Eq. (22.6.15)

差が存在し、

$$M(-n,\alpha+1,x)=\frac{n!}{(\alpha+1)_n}L_n^{(\alpha)}(x) \tag{21}$$

または逆に解いて

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}M(-n,\alpha+1,x) \tag{22}$$

の関係性があります[8]。ここで、$\binom{n}{k}$ は二項係数で

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{23}$$

です。

さて、注意しなければならないことに、ラゲールの微分方程式の解として挙げた $U(a,b,x)$ は $M(a,b,x)$ に比例します。具体的には、$a=-n, n=0,1,2,\cdots$ の場合に

$$U(-n,b,z)=(-1)^n(b)_nM(-n,b,z) \tag{24}$$

の関係式を持ってしまい、定数倍の違いしか現れなくなります[9]。これは従属な解ということを示しており、実は Eq. (19) はラゲールの微分方程式の一般解ではない、という結論になります。では $M(-n,\alpha+1,z)$ ともう一つの一般解は何なのかというと、原点付近で $a=0,-1,-2,\cdots$ の場合に適当な、以下の解 $U'(-n,\alpha+1,z)$ があるようです（原点付近の *Numerically Satisfactory Solutions*）[10]。

$$\begin{aligned}&U'(-n,\alpha+1,z)\\&=\sum_{k=1}^{\alpha}\frac{\alpha!(k-1)!}{(\alpha-k)!(1+n)_k}z^{-k}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{z^k}{k!}(\ln(z)+\psi(1+n-k)-\psi(1+k)-\psi(\alpha+k+1))\\&\qquad+(-1)^{1+n}n!\sum_{k=1+n}^{\infty}\frac{(k-1-n)!}{(\alpha+1)_k}\frac{z^k}{k!}\end{aligned} \tag{25}$$

だいぶ複雑に見えますが、この式で言いたいのは、$U'(-n,\alpha+1,z)$ は $\ln(z)$ が存在するために原点で発散する関数だということです。クンマー方程式を解くうえで、原点で発散してはいけないという境界条件が付いているのであれば、Eq. (18) の原点正則な解はラゲール陪多項式だけだ、と言うことができます。

原点で発散してはいけない境界条件の有名な例は、波動関数を計算する際などに現れます。波動関数は存在確率密度が発散しない、不連続にならないという条件が付けられていますので、発散してしまう解は適当ではなくなるのです。

[8] [1]Eq. (13.6.9), Eq. (22.5.54)
[9] [2]Eq. (13.2.7)
[10] [2]Eq. (13.2.28)

一方で、漸近領域の *Numerically Satisfactory Solutions* は、Eq. (8e) と Eq. (8g) の解が用いられます。すなわち、漸近領域で条件が明確であれば、Eq. (18) の一般解は

$$w = c_1 U(-n, \alpha+1, z) + c_2 e^z U(n+\alpha+1, \alpha+1, -z), \quad (-\pi/2 \geq \arg(z) \geq 3\pi/2) \tag{26}$$

のように与えられます[11]。この解の $z \to +\infty$ における漸近での振る舞いは、第一項目は $M(-n, \alpha+1, z)$ に比例、すなわちラゲール陪多項式ですので、多項式の振る舞いを見せます。一方、第二項で z が大きいときに強い項は $z^n e^z$ の形を持つ指数関数となるため[12]、発散速度が大幅に違う二つが現れ、*Numerically Satisfactory Solutions* となります[13]。漸近で明確な違いが現れる解となります。

例を挙げるならば、これも水素原子の波動関数で現れます。$a = -n$ である場合は束縛状態を表しているため、漸近領域では波動関数はゼロに向かわなければなりません。実際には Eq. (18) の解 w に $e^{-x/2}$ が掛かった形となります (x は正の実数で、z の代わりに使用しています)。

なので、多項式解 $U(-n, \alpha+1, z)$ はこの指数関数により抑えられ、漸近でゼロである条件は満たされますが、もう一つの項はそこに含まれる指数関数によってゼロとはならず、物理的に意味の無い解となってしまいます。

ここからはラゲール陪多項式に注目してどのような性質があるか、見ていきます。

2.2 ラゲール陪多項式のあらわな形

級数で記述するならば、以下のように書けます。[14]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{1}{m!} x^m \tag{27}$$

また、微分演算子を用いる場合は[15]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n! e^{-x} x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-x} x^{\alpha+n} \right] \tag{28}$$

と書けます。

---

[11] [2] Eq. (13.2.24)

[12] [1]Eq. (13.5.2)

[13] こういう理屈だと思いますが、なかなか自信が持てません。しかしながら、指数関数より強いか弱いかは重要な情報ですので、よい指標ではないかな…と思っています。どなたか根拠のある文献等ご存じでしょうか？

[14] [1]Eq. (22.3.9)

[15] [1]Eq. (22.11.6)

2.3 具体例

いくつかの例をいかに挙げます。

$$L_0^{(0)}(x) = 1 \tag{29a}$$

$$L_1^{(0)}(x) = -x + 1 \tag{29b}$$

$$L_2^{(0)}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \tag{29c}$$

$$L_3^{(0)}(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) \tag{29d}$$

$$L_0^{(1)}(x) = 1 \tag{29e}$$

$$L_1^{(1)}(x) = -x + 2 \tag{29f}$$

$$L_2^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 6\right) \tag{29g}$$

$$L_3^{(1)}(x) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 12x^2 - 36x + 24\right) \tag{29h}$$

2.4 直交性

[16]

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) L_{n'}^{(\alpha)}(x) dx = h_n \delta_{n,n'}, \quad (\alpha > -1) \tag{30}$$

$$h_n = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \tag{31}$$

2.5 微分

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \tag{32}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} L_n^{(\alpha)}(x) = L_{n-2}^{(\alpha+2)}(x) \tag{33}$$

[16] [1]Eq. (22.2.12)

Reference

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover Publications Inc., New York, 1972),

[2] NIST Digital Library of Mathematical Functions `https://dlmf.nist.gov/`

[3] Wesley N. Mathews Jr., Mark A. Esrick, Zu Yao Teoh and James K. Freericks, A physicist's guide to the solution of Kummer's equation and confluent hypergeometric functions (2021) `https://arxiv.org/pdf/2111.04852.pdf`

[4] Weisstein, Eric W. "Associated Laguerre Polynomial." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. `https://mathworld.wolfram.com/AssociatedLaguerrePolynomial.html`

[5] ラゲールの陪多項式, wikipedia (2022 年 1 月 19 日アクセス) `https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%A9%E3%82%B2%E3%83%BC%E3%83%AB%E3%81%AE%E9%99%AA%E5%A4%9A%E9%A0%85%E5%BC%8F`

[6] Laguerre polynomials, wikipedia (2022 年 1 月 19 日アクセス) `https://en.wikipedia.org/wiki/Laguerre_polynomials`

[7] Многочлены Лагерра, wikipedia (2022 年 1 月 19 日アクセス) `https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%87%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D1%8B_%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D0%B5%D1%80%D1%80%D0%B0`

[8] 高田健次郎著, 量子力学, 朝倉書店 (1983), ISBN4-254-13607-2