群速度・位相速度と群遅延・位相遅延

シキノ *

July 22, 2022

Contents

*https://slpr.sakura.ne.jp/qp/, https://twitter.com/sikinote

1 まとめ

1. 分散関係は, ある均一な媒質中を伝わる波の性質を表現し, 位置に対する波数 k と, 時間に対する角周波数 ω を結び付ける関係式です.

2. 群速度・位相速度は, 分散関係から導かれる量です. ある均一な媒質中を伝わる波が, 遅く振動する波と早く振動する波の積で掛けている場合に意味がある量です. 遅く振動する波の進む速度を群速度, 早く振動する波の進む速度を位相速度と呼びます.

3. 群遅延・位相遅延は, ある均一な媒質中の一部に存在する別の媒質の特徴を示す量です. 別の媒質へ侵入する前に均一な媒質中を伝わる波が, 遅く振動する波と早く振動する波の積で掛けている場合に意味がある量で, 別の媒質によって波のどの波数がどのくらいずれるかの量を示します. 遅く振動する波が遅れる時間を群遅延, 早く振動する波が遅れる時間を位相遅延と呼びます.

分散関係 $\omega = \omega(k)$ を満たす媒質中で, 波 f が位置 x と時間 t の変数として書けている場合, 波 $f(x,t)$ は

$$f(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} \tag{1.1}$$

と書けます. 特に $k = k_0$ 周りしか波が存在しない場合, 波は

$$f(x,t) = A(x - v_g t) e^{ik_0(x - v_p t)} \tag{1.2}$$

と書けます. ここで, $A(x)$ は波数 $k \ll k_0$ でしか値を持たないゆっくり振動する波です. また v_g, v_p はそれぞれ群速度, 位相速度を表し, 以下の式で表されます.

$$v_g \equiv \omega'(k_0) = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}, \quad v_p \equiv \frac{\omega(k_0)}{k_0} \tag{1.3}$$

均一な媒質中の一部に存在する別の媒質の特徴が, インパルス応答 $G(k)$ で書かれるとします. すると, 別の媒質に入射する波 $f_0(x,t)$ が Eq. (1.2) で書けている時に, 透過した波 $g(x,t)$ は

$$\left. g(x,t) \right|_{t\to\infty} = |G_0| A\left(x - v_g t + \varphi_0'\right) e^{ik_0 x - i\omega_0 t + i\varphi_0} \tag{1.4}$$

と書けます. ここで, $G(k) = |G(k)| e^{i\varphi(k)}$ であり,

$$|G_0| \equiv G(k_0), \quad \varphi_0 \equiv \varphi(k_0), \quad \varphi_0' \equiv \left.\frac{d\varphi(k)}{dk}\right|_{k=k_0} \tag{1.5}$$

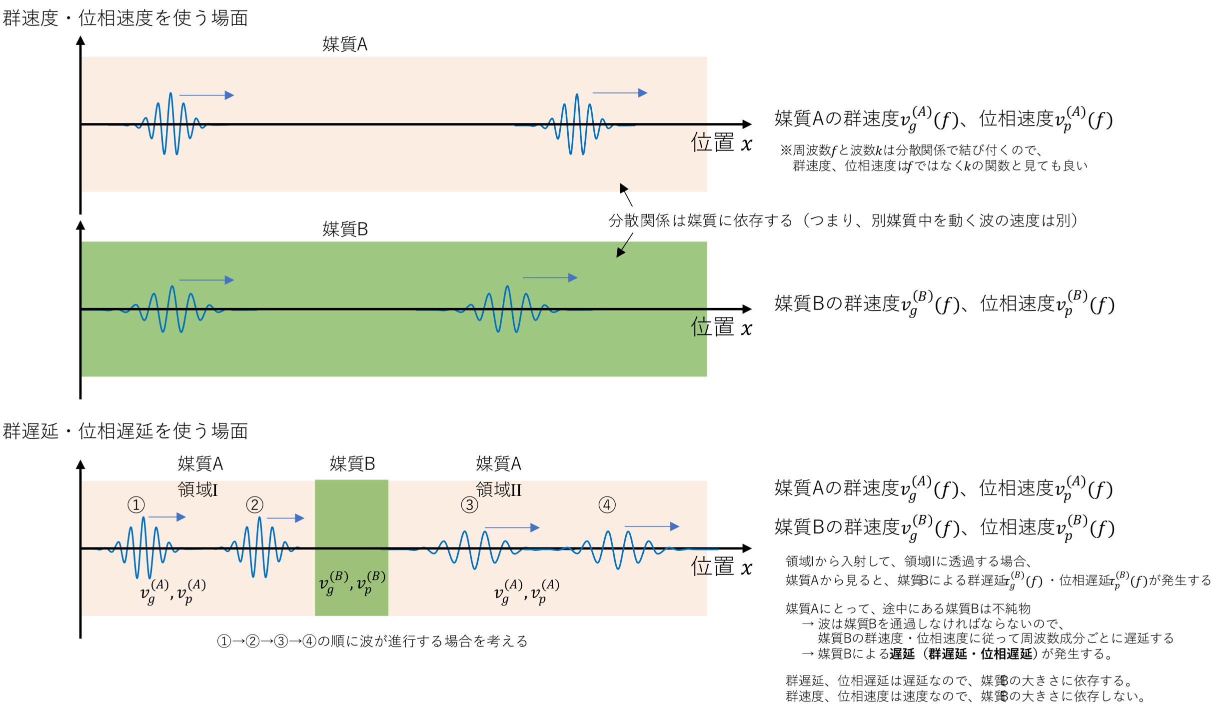

Figure 1: 全体の概要

と定義しています. ある位置でしか波形を見ない場合, 相互作用の影響は時間的な遅れとして観測され, これらを群遅延, 位相遅延と呼び, 次の通り定義されます.

$$t_g = \frac{1}{v_g}\varphi_0' = -\left.\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0} \tag{1.6}$$

$$t_p = \frac{1}{v_p}\varphi_0 = -\frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0} \tag{1.7}$$

別の媒質に侵入すると, 波の形が崩れてしまいます. その効果は $\varphi''(k)$ で表現することができます. $A(x) = e^{-(x/a)^2}$ で書かれる場合, 透過した波 $g(x,t)$ は

$$g(x,t)\Big|_{t\to\infty} = |G_0|e^{ik_0x - i\omega_0 t + i\varphi_0}\cdot\frac{a}{(a^2-2i\varphi_0'')^{1/2}}e^{-\frac{(x-v_g t+\varphi_0')^2}{a^2-2i\varphi_0''}} \tag{1.8}$$

と書かれ, 波の形が崩れていることが分かります.

Fig. 1 に群・位相速度と群・位相遅延が使われる場合を図示しました.

2 波の基本事項

一般的な位置 x と時間 t の関数 $f(x,t)$ を, 波数 k と角周波数 ω で表現しようとすると,

$$f(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega) e^{ikx-i\omega t} \tag{2.1}$$

と書けます[1]. ここで, $f(x,t), f(k,\omega)$ は基本的には複素関数です. つまり, k, ω は独立に存在し, 両者に関係性は全くないということを示しています.

もしも $f(x,t)$ に「波動方程式を満たす」という条件が付いたとしましょう. この場合, k と ω に関係性が生じ, 片方を決めたらもう片方の取り得る値が制限されます. 例えば k を決めると, その時の ω は

$$\omega = \omega_n(k), \quad (n\text{ は取り得る数だけ}) \tag{2.2}$$

となります. n は, 波動方程式が時間に関して何階の偏微分方程式なのかで決定されます [2]. この波数と角周波数との関係式 (2.2) が存在することを**分散関係がある**と言います.

分散関係の下では, Eq. (2.1) に含まれる角周波数はもはや k の従属変数なので

$$f(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \sum_n f_n(k, \omega_n(k)) e^{ikx-i\omega_n(k)t} \tag{2.3}$$

となります. Eq. (2.1) と比べたら,

$$f(k,\omega) \to \sum_n f_n(k,\omega) \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_n(k)) \tag{2.4}$$

の変形により分散関係を取り込むことができる, と考えれば良いです.

まだ一般的過ぎるので, 更に条件を加えます. 波が 1 つの n だけの分散関係で書ける波であることを考えましょう. この状況は, 十分に孤立した状態の波など, 性質が似通った成分だけで構成された波である場合に成立します. この場合, n はたった一つしかないので, n に対する和を除いて添え字も除いて

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \int \frac{dk}{2\pi} f(k,\omega(k)) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} && (2.5a) \\ &\equiv \int \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} && (2.5b) \end{aligned}$$

[1] なぜ k は e^{ikx} でプラスにするのに, ω は $e^{-i\omega t}$ とマイナスを取るのか, 後者はフーリエ変換でおかしくないか? という話もありますが, 結論はどちらでも構いません. 定義があればそれでよいのです.

[2] 時間に関して 1 階なら $n=1$ のみ, 2 階なら $n=1,2$ です. また波数について解いていたら $k=k_m(\omega)$ で, 波動方程式が位置に関して何階の偏微分方程式なのかで決定されます. 物性物理学に親しい人にとっては, extended zone 形式で表現した場合の数 n であり, reduced zone 形式ではないです.

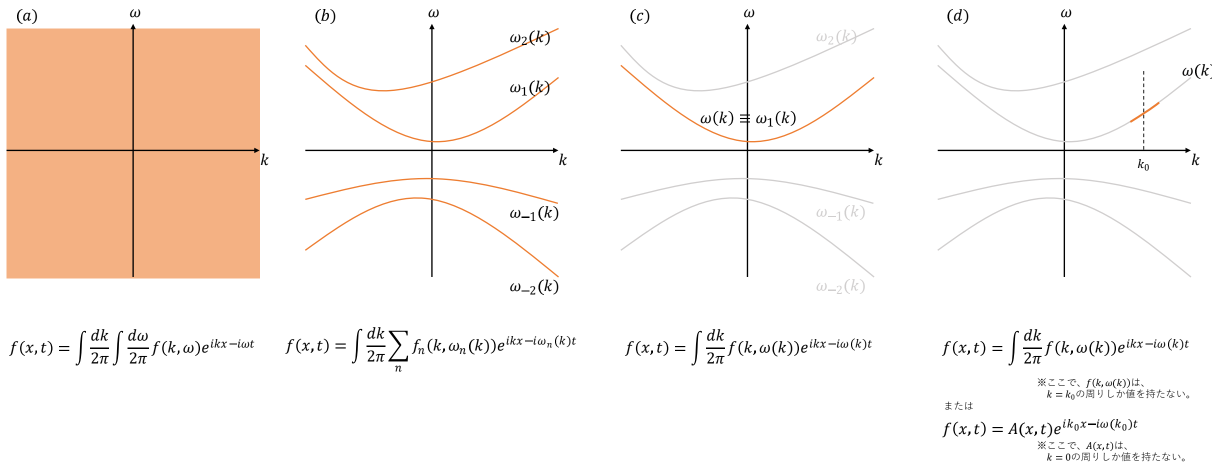

Figure 2: 波の表現と分散関係. 横軸は波数, 縦軸は角周波数. それぞれの図で, オレンジの部分の成分が利用され波が表現される. (a) 分散関係が無いときの表現 (2.1), (b) 分散関係があるときの表現 (2.3), (c) ある一つの分散関係に注目したときの表現 (2.5), (d) 波がある一つの分散関係かつある波数周りの成分しか持たない場合の表現 (3.2)

と書きます.

Eq. (2.5) をスタートとして, 波の速度をこれから考えていきます. 応用上, 分散関係が混在した場合を用いることは少ないです. 実験的にも理論的にも扱いやすいですし, モデル化もしやすいためだからだと思います.

Fig. 2 に, これまで扱ってきた波と分散関係の使用する位置を示しました.

3 波の速度

応用上重要な波というのは, おおよそ一つの分散関係を持つ波で, しかも波数が特定の波数周りに集中している場合を扱うことがほとんどです. つまり, Eq. (2.5) かつ適当な波数 $k = k_0$ 周りしか存在しないと考える訳です. 式で書けば,

$$f(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} \tag{3.1a}$$

$$f(k) = \begin{cases} f(k), & (|k-k_0| < \pm\Delta k/2) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{3.1b}$$

です.

この仮定の下, 近似を進めて波の速度とは何か？を探っていきましょう. 結果として, 波の速度とは？という問いかけに対する答え, **群速度**と**位相速度**が存在します.

3.1 群速度

$k = k_0$ 周りしか存在しない場合, 分散関係は Δk の範囲だけ分かれば十分なので, テーラー展開してもよさそうです. つまり,

$$\omega(k)\Big|_{k=k_0} = \omega(k_0) + (k-k_0)\frac{d\omega}{dk}\Big|_{k=k_0} + O(|k-k_0|^2) \tag{3.2a}$$

$$= \omega(k_0) + (k-k_0)\omega'(k_0) + O(|k-k_0|^2) \tag{3.2b}$$

と分散関係を近似します. Eq. (3.1) に代入すると

$$f(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} \tag{3.3a}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ikx} e^{-i[\omega(k_0)+(k-k_0)\omega'(k_0)]t} \tag{3.3b}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ik(x-\omega'(k_0)t)} \cdot e^{-i[\omega(k_0)-k_0\omega'(k_0)]t} \tag{3.3c}$$

$$= f(x-\omega'(k_0)t, 0) \cdot e^{-i[\omega(k_0)-k_0\omega'(k_0)]t} \tag{3.3d}$$

となります. Eq. (3.3d) に現れる $f(x-\omega'(k_0)t, 0)$ は, 時刻 $t=0$ の波形を平行移動しただけの波形です. 残りの項は位相の変化しか与えません ($f(x,t)$ の絶対値を取ると消えてしまう部分です).

この時, 平行移動する波形の速度

$$v_g \equiv \omega'(k_0) = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k=k_0} \tag{3.4}$$

を**群速度**と呼びます. 位相の部分はどのように解釈できるでしょうか. 次の節 (3.2) で見ていきましょう.

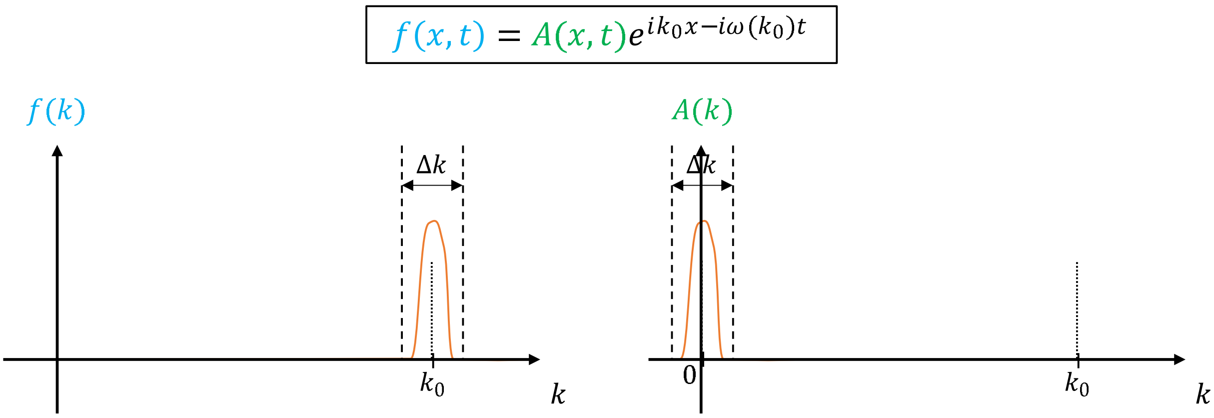

Figure 3: 節 3.2 で仮定した Eq. (3.1) を満たす波形の波数空間の表示．横軸は波数, 縦軸はその波数の成分．(左)$f(x,t)$ の波数表示．$k = k_0$ 周りに成分が集中している様子を示す．(右)$A(x,t)$ の波数表示．$k = 0$ 周りに成分が集中している様子を示す．

3.2 位相速度

Eq. (3.3d) より, 平行移動の部分はその意味が明確に分かりますが, 位相の部分が分かりにくいです．なぜなら, $f(x,t)$ は基本的に複素数で, 平行移動した場合にその位相成分もずれてしまうため, なかなか難しい箇所でもあるからです．

そこで, Eq. (3.1) の仮定を満たすような波形を具体的に

$$f(x,t) = A(x,t)e^{ik_0t-\omega_0t} \tag{3.5}$$

として考えることにします．ここで, $A(x,t)$ は実数値関数でゆっくり振動する波の包絡線を表す, とします．

Eq. (3.1) を満たす代表的な波の例として,

- うなり

$$A(x,t) \propto \cos(k_Ax - \omega(k_A)t), \quad (\text{ただし } k_A \ll k_0) \tag{3.6}$$

- ガウシアン型波束 (波が空間的に孤立している)

$$A(x,t) \propto \exp\left[-(k_Ax - \omega(k_A)t)^2\right], \quad (\text{ただし } k_A \ll k_0) \tag{3.7}$$

などが挙げられます．

Eq. (3.5) は少々きつい仮定ですので, ここから導いた結論は一般の場合を説明するものではありません．しかし, ここではこの具体例を挙げてそれが分かればおおよその場合で成り立ちます, ということにして説明は終えたいと思います．

今, Eq. (3.5) は仮定 (3.1) を満たしているため, Eq. (3.4) の $f(x,t)$ として使用することができます. つまり,

$$\begin{aligned} f(x,t) &= f(x-\omega'(k_0)t,0)\cdot e^{-i[\omega(k_0)-k_0\omega'(k_0)]t} && (3.8a)\\ &= A(x-\omega'(k_0)t,0)e^{ik_0(x-\omega'(k_0)t)}\cdot e^{-i[\omega(k_0)-k_0\omega'(k_0)]t} && (3.8b)\\ &= A(x-\omega'(k_0)t,0)e^{ik_0x-i\omega(k_0)t} && (3.8c)\\ &= A(x-\omega'(k_0)t,0)e^{ik_0\left(x-\frac{\omega(k_0)}{k_0}t\right)} && (3.8d)\\ &= A(x-v_gt,0)e^{ik_0(x-v_pt)} && (3.8e) \end{aligned}$$

のように式変形していくことができます. Eq. (3.8e) より, 包絡線が動く速度は群速度 v_g で前節で見た通りですが, 位相の部分が明確になり, その速度が

$$v_p \equiv \frac{\omega(k_0)}{k_0} \tag{3.9}$$

であると明確になりました. この位相が動く速度 v_p は**位相速度**と呼ばれています.

4 遅延

4.1 群遅延・位相遅延

ある程度ふんわりしながら導いていきます．これが限界でした．

出発地点は, 波動方程式

$$(\hat{D} + \hat{D}')f(x,t) = 0 \tag{4.1}$$

を満たす媒質中の波について考えることです．

ここで, $\hat{D}'$ は

$$\hat{D}'\Big|_{|x|<a} = 0 \tag{4.2}$$

を満たしているとします．ここで, 初期状態が

$$f(x,t)\Big|_{t\to-\infty} = f_0(x,t) \tag{4.3}$$

であるとします．また $t \to -\infty$ では, $f_0(x,t)$ は $\hat{D}' = 0$ となる $x < -a$ の一部分に集中して存在していると仮定します．

この時, 時間が進み波が $|x| < a$ の $\hat{D}'$ が存在する領域を通過し, その後, 時刻 $t \to \infty$ の時に波形がどのようになるか考えてみます．

解を

$$f(x,t) = f_0(x,t) + g(x,t) \tag{4.4}$$

と仮定します．ここで, $g(x,t)$ は $f_0(x,t)$ が $|x| < a$ に侵入した後の変形具合を示しています．つまり, $f_0(x,t)$ がやってくるまでは存在しませんし, $f_0(x,t)$ が存在しなければ, $g(x,t)$ も存在しません．式で表せば

$$g(x,t)\Big|_{t\to-\infty} = 0 \tag{4.5a}$$

$$g(x,t) = 0, \ \ (\text{if} \ \ f_0(x,t) = 0) \tag{4.5b}$$

を満たす波とします．また, 十分に時間がたてば相互作用 $\hat{D}'$ の領域からは離れると想像できますので,

$$\hat{D}f(x,t)\Big|_{t\to\infty} = 0 \tag{4.6}$$

と予想できます

Eq. (4.1) の解の中で Eq. (4.4) を探すためにこれを代入すると, 未知の関数 g に対する

非斉次波動方程式 Eq. (4.7b) を得ることができます．計算過程は以下の通りです[3].

$$\begin{aligned}(\hat{D}+\hat{D}')[f_0(x,t)+g(x,t)] &= 0 &(4.7a)\\ \left[-\hat{D}'^{-1}(\hat{D}+\hat{D}')\right]g(x,t) &= f_0(x,t) &(4.7b)\end{aligned}$$

ここで更にあらわな形で $g(x,t)$ を書くためにグリーン関数 $G(x,t;x',t')$ を導入します．$G(x,t;x',t')$ は微分方程式

$$\left[-\hat{D}'^{-1}(\hat{D}+\hat{D}')\right]G(x,t;x',t') = \delta(x-x')\delta(t-t') \tag{4.8}$$

を満たす関数です．グリーン関数はインパルス応答とも呼ばれます．左辺が微分演算子で構成されているのであれば, 右辺は $x-x', t-t'$ の形でしか存在しないため,

$$G(x,t;x',t') \to G(x-x',t-t') \tag{4.9}$$

と書くことができます．グリーン関数を導入すると Eq. (4.7b) の解は

$$g(x,t) = g_0(x,t) + \int dx' \int dt' G(x-x',t-t') f_0(x,t) \tag{4.10}$$

と書くことができます．ここで, $g_0(x,t)$ は

$$\left[-\hat{D}'^{-1}(\hat{D}+\hat{D}')\right]g_0(x,t) = 0 \tag{4.11}$$

を満たす任意の関数です．Eq. (4.10) が Eq. (4.7b) の解として適切かは, Eq. (4.10) の両辺に $\left[-\hat{D}'^{-1}(\hat{D}+\hat{D}')\right]$ を作用させることで確認できます．今, $f_0(x,t)=0$ ならば $g(x,t)=0$ を仮定しているため, $g_0(x,t)=0$ です．なので

$$g(x,t) = \int dx' \int dt' G(x-x',t-t') f_0(x,t) \tag{4.12}$$

と書くことができます．つまり, Eq. (4.1) の解として

$$f(x,t) = f_0(x,t) + \int dx' \int dt' G(x-x',t-t') f_0(x,t) \tag{4.13}$$

が得られます．

[3] 実際に Eq. (4.7a) が解けるか…と言いますが, $\hat{D}, \hat{D}'$ の中身がなかなか分かりません．これを知るには Maxwell 方程式を解きにいかなければならず, 電磁界解析などが必要になるはずです．簡単には $\hat{D}$ の分散関係を実測して求めることで満足します．

4.2 畳み込み積分の考察

ここから,

$$\begin{aligned} f(x,t) &= f_0(x,t) + g(x,t) && (4.14a)\\ &= f_0(x,t) + \int dx' \int dt' G(x-x', t-t') f_0(x,t) && (4.14b)\end{aligned}$$

の右辺 $g(x,t)$ について考えていきます. 今やりたいことは, この式から応用上重要な波である Eq. (3.1) を考えたときに何が言えるか, を調べることです.

$g(x,t)$ に含まれる形はまさに畳み込み積分ですので, まずは波数・周波数空間で考えましょう. $G(x,t), f_0(x,t)$ のフーリエ変換

$$\begin{aligned} G(k,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt G(x,t) e^{-ikx+i\omega t} && (4.15a)\\ f_0(k,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt f_0(x,t) e^{-ikx+i\omega t} && (4.15b)\end{aligned}$$

又は逆変換

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(k,\omega) e^{ikx-i\omega t} && (4.16a)\\ f_0(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f_0(k,\omega) e^{ikx-i\omega t} && (4.16b)\end{aligned}$$

を考えると,

$$g(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(k,\omega) f_0(k,\omega) e^{ikx-i\omega t} \tag{4.17}$$

となります. 分散関係を用いて積分を減らす場合, $|x| > a$ を想定する $\hat{D}g(x,t)|_{t\to\infty} = 0$ を満たす領域しか用いることができません. また, 分散関係の取り込みは Eq. (2.4) に従って被積分関数を変更すれば良く, 後程導入します.

初期状態の波が, ある波数 k_0 かつある角周波数 ω_0 周りに存在し, 波の包絡線が $A(x,t)$ と書けている場合を考えます. この状況では, Eq. (3.8e) で見たのと似たように, 波 $f_0(x,t)$ は

$$f_0(x,t) = A(x,t) e^{ik_0 x - i\omega_0 t} \Big(= A(x - v_g t) e^{ik_0(x - v_p t)} \Big) \tag{4.18}$$

と書くことができます. ここで, $A(x) \equiv A(x, t=0)$, $\omega_0 \equiv k_0 v_p$ と書きました. 初期状態の波の, 位置と波数空間の様子の例を Fig. 4 に示しました.

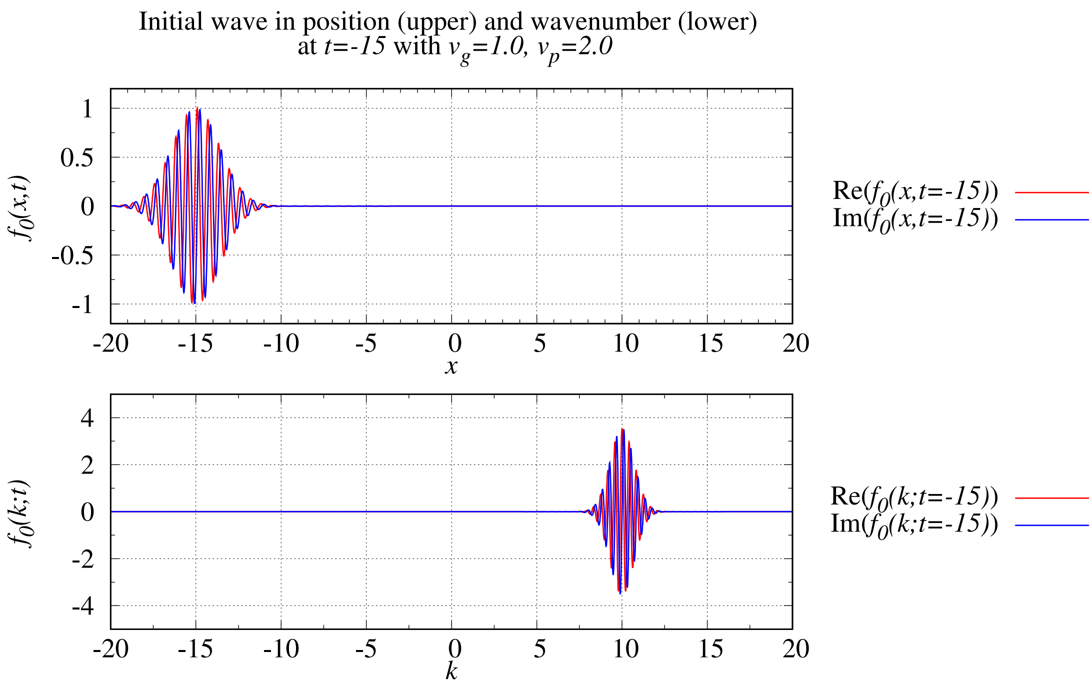

Figure 4: 初期状態 $f_0(x,t)$ の例．ここでは，$f_0(x,t) = e^{[-(\frac{x-v_g t}{2})^2]} e^{ik_0 x - i\omega_0 t}$ を考え，$k_0 = 10, \omega_0 = kv_p$．(上図) 横軸を位置にとって波を描画，(下図) 横軸を波数にとって描画．

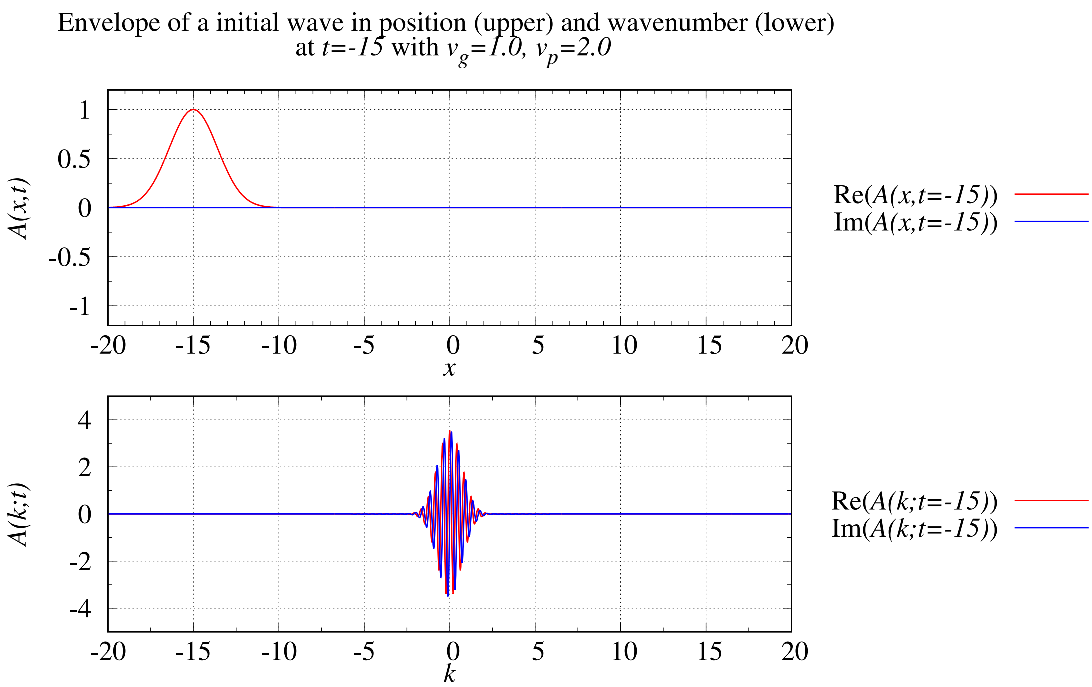

Figure 5: 初期状態 $f_0(x,t)$ を構成する早く振動しない包絡線の例．ここでは，Fig. 4 との対比を考えて，$A(x,t) = e^{[-(\frac{x-v_g t}{2})^2]}$ を考えている．(上図) 横軸を位置にとって波を描画，(下図) 横軸を波数にとって描画．

Eq. (4.17) に代入するために, f_0 のフーリエ変換を考えますと,

$$\begin{aligned} f_0(k,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[A(x,t)e^{ik_0x-i\omega_0t}\right] e^{-ikx+i\omega t} && (4.19a)\\ &= A(k-k_0,\omega-\omega_0) && (4.19b)\end{aligned}$$

と式変形できます. ここで, 包絡線のフーリエ変換

$$\begin{aligned} A(k,\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt A(x,t)e^{-ikx+i\omega t} && (4.20a)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx A(x,t)e^{-ikx}\right] e^{+i\omega t} && (4.20b)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt A(k;t)e^{i\omega t} && (4.20c)\end{aligned}$$

を定義し用いました. 以降適宜使用します. 包絡線に関する位置と波数空間の波の様子の例を Fig. 5 に示しました.

Eq. (4.17) の f_0 を Eq. (4.19) に代入すると,

$$g(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(k,\omega)A(k-k_0,\omega-\omega_0)e^{ikx-i\omega t} \tag{4.21}$$

となります.

4.2.1 分散関係の導入

さて, $t \to \infty$ を考えて $\hat{D}$ の領域で使用できる分散関係を $\omega = \omega(k)$ として導入します. 分散関係は Eq. (2.4) で導入できることを考えると,

$$\begin{aligned} g(x,t)\big|_{t\to\infty} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(k,\omega)A(k-k_0,\omega-\omega_0)\cdot 2\pi\delta(\omega-\omega(k))e^{ikx-i\omega t} && (4.22a)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} G(k)A(k-k_0)e^{ikx-i\omega(k)t} && (4.22b)\end{aligned}$$

となります. ここで, $G(k) \equiv G(k,\omega(k)), A(k) \equiv A(k,\omega(k)), \omega_0 = \omega(k_0)$ と表記を略して書いています.

Eq. (4.22b) を変数変換すると,

$$\begin{aligned} g(x,t)\big|_{t\to\infty} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} G(k+k_0)A(k)e^{i(k+k_0)x-i\omega(k+k_0)t} && (4.23a)\\ &= e^{ik_0x-i\omega_0t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} G(k+k_0)A(k)e^{ikx-i(\omega(k+k_0)-\omega_0)t} && (4.23b)\end{aligned}$$

となります.

ここで 2 つの仮定を考えて式を進めていきましょう. 一つ目は, 群・位相速度の時と同じように $k = k_0$ 周りで分散関係を展開すること, もう一つはグリーン関数の振幅, 位相を $k = k_0$ 周りで展開することです.

今, $A(k)$ は包絡線であり, 時間的もしくは空間的にも非常にゆっくり振動することを仮定しているので, $k \to 0$ 周りにしか値を持ちません. また, 分散関係が使えるこの領域では $k \to 0$ の周りで線形であるとして,

$$\omega(k+k_0)|_{k\to 0} = \omega_0 + kv_g + O(k^2) \tag{4.24}$$

で書けるとします. ここで, $v_g = \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=k_0}$ は群速度 (3.4) と同一です.

続いてグリーン関数を振幅と位相に分解して

$$G(k) = |G(k)|e^{i\varphi(k)} \tag{4.25}$$

と書くことにします. 更に一つ目の過程と同じように, $A(k-k_0)$ が値を持つ $k - k_0 = 0$ となる周りのみ, 積分に寄与すると考えます. そのため, グリーン関数を $k = k_0$ 周りでテーラー展開して,

$$\left.|G(k+k_0)|\right|_{k\to 0} = |G_0| + O(k^1) \tag{4.26a}$$

$$\left.\varphi(k+k_0)\right|_{k\to 0} = \varphi_0 + k\varphi_0' + O(k^2) \tag{4.26b}$$

を得ます. ここで, 表記

$$|G_0| \equiv G(k_0), \quad \varphi_0 \equiv \varphi(k_0), \quad \varphi_0' \equiv \left.\frac{d\varphi(k)}{dk}\right|_{k=k_0} \tag{4.27}$$

を用いました. k は位相は 2 次, 振幅は 1 次まで考慮しています [4].

以上の仮定を Eq. (4.23b) に代入すれば,

$$\left.g(x,t)\right|_{t\to\infty} \approx e^{ik_0x-i\omega_0t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}|G_0|e^{i\varphi_0+ik\varphi_0'}A(k)e^{ik(x-v_gt)} \tag{4.28a}$$

$$= |G_0|e^{ik_0x-i\omega_0t+i\varphi_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}A(k)e^{ik(x-v_gt+\varphi_0')} \tag{4.28b}$$

$$= |G_0|e^{ik_0x-i\omega_0t+i\varphi_0}A(x-v_gt+\varphi_0') \tag{4.28c}$$

と整理できます.

[4] ここまでの次数の考慮で, 期待する結論が出ることが分かっているのでこのオーダーで打ち切っています. 振幅が平坦でも, 今回注目する現象が起こる裏付けでもあります. まぁ, 振幅を入れても良いのですが, 群遅延, 位相遅延の最低限の説明には関係ありません. 最後の結果を知っているからできることです.

ここで, $t \to -\infty$ の波である入射波 $f_0(x,t)$ と, 何かしらの影響を受けた場合の $t \to \infty$ の波 $g(x,t)$ を比べてみましょう. すると,

$$f_0(x,t) = A(x - v_g t) \quad e^{ik_0(x - v_p t)} \tag{4.29a}$$

$$g(x,t)\Big|_{t\to\infty} = |G_0| A\left(x - v_g t + \varphi_0'\right) e^{ik_0 x - i\omega_0 t + i\varphi_0} \tag{4.29b}$$

となります. あまり重要ではない振幅の大きさの変化を除き, 時間を固定して位置の差を見てみますと, f_0 と比べて

- 包絡線が, 位置 $x \to x + \varphi_0'$ だけ変化する.
  $\to$ つまり, $\varphi_0' > 0$ の時, 指定位置に φ_0' だけ遅れて到来する.

- 位相が, 位置 $x \to x + \varphi_0/k_0$ だけ変化する.
  $\to$ つまり, $\varphi_0 > 0$ の時, 指定位置に φ_0/k_0 だけ遅れて到来する.

となります.

ある位置でしか波形を見ない場合, 相互作用の影響は時間的な遅れとして定義されます. この時の包絡線, 位相は, 波形が t_g, t_p 秒後に来ることが分かります. よってこれらを群遅延, 位相遅延と呼び, 速度は群速度, 位相速度であるから, それらは次の通り定義されます.

$$t_g = \frac{1}{v_g}\varphi_0' = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=\omega_0} \tag{4.30}$$

$$t_p = \frac{1}{v_p}\varphi_0 = -\frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0} \tag{4.31}$$

ここで, 今考えている関係は $kx - \omega t$ となるので, 角周波数 ω の関数として φ を見る場合は負号が付くことに注意してください.

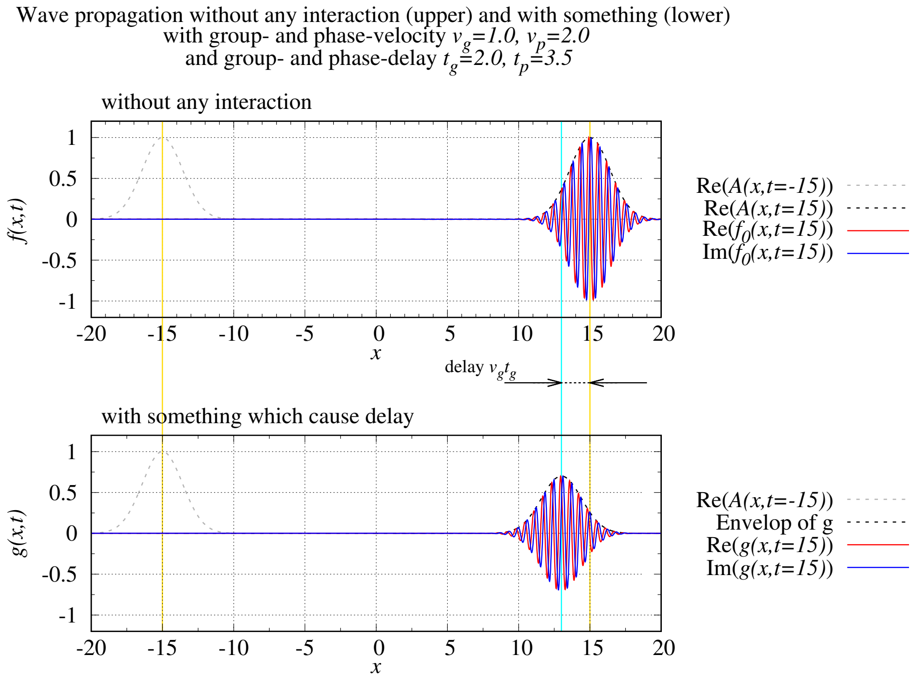

Figure 6: 時間を固定し位置軸上で波を見た場合の, 相互作用がない場合の波の様子（上図）と, 受けた場合の波の様子（下図）．つまり, $f_0(x, t = 15)$ と $g(x, t = 15)$ を図示．$x \approx 0$ 周りにのみ, 相互作用を及ぼす領域 (Fig. 1) が存在している事を想定．f_0 は Fig. 4, Fig. 5 と同じ．

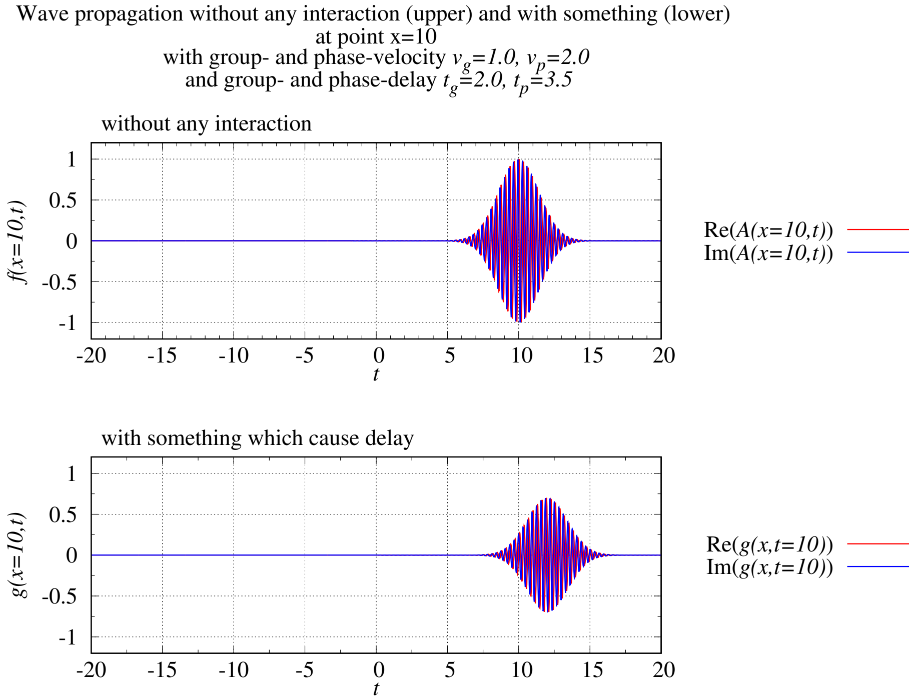

Figure 7: 位置を固定し時間軸上で波を見た場合の, 相互作用がない場合の波の様子（上図）と, ある場合の波の様子（下図）．つまり, $f_0(x = 10, t)$ と $g(x = 10, t)$ を図示．$x \approx 0$ 周りにのみ, 相互作用を及ぼす領域 (Fig. 1) が存在している事を想定．f_0 は Fig. 4, Fig. 5 と同じ．位置を固定したため, 位相が動く分も変化する．そのため, Fig. 5 などよりも多く振動しているように見える．

4.3 拡散

さて, 群遅延・位相遅延があると, 異なる分散関係を持つ別媒質中に波が侵入した場合, 波が広がることが良く説明されます. ちゃんと数式でこれを追ってみましょう.

Eq. (4.29a), Eq. (4.29b) を見ると, 拡散はしないという結論になるため, これまでの過程では拡散の効果が入っていないことが分かります. まずはこれを確かめてみましょう. ここで言う拡散は, 包絡線の形がずれることを意味すると思ってよいです.

今, 波形は Eq. (4.29a) の形を考えていますので, 絶対値を取れば包絡線が現れます. 実際にとってみると

$$
\begin{aligned}
|f_0(x,t)| &= |A(x-v_g t)| && (4.32a)\\
|g(x,t)|_{t\to\infty} &= |G_0|\cdot|A\left(x-v_g t+\varphi_0'\right)| && (4.32b)
\end{aligned}
$$

となります. つまり, 平行移動や定数倍の変化はしますが, 波の形自体が変わることが無いのです.

今は, 相互作用を引き起こす領域で波が崩れて, 分散関係が使用できる $\hat{D}$ の領域では波は崩れないこと (=分散関係は線形のまま) を考えたいです. そのため, グリーン関数の位相の次数を k^2 の項まで上げて考えてみたいと思います. つまり, Eq. (4.33) の仮定を

$$
\begin{aligned}
|G(k+k_0)|\Big|_{k\to 0} &= |G_0| + O(k^1) && (4.33a)\\
\varphi(k+k_0)\Big|_{k\to 0} &= \varphi_0 + k\varphi_0' + \frac{1}{2}k^2\varphi_0'' + O(k^3) && (4.33b)
\end{aligned}
$$

として変形します. ここで,

$$
\varphi_0'' = \frac{d^2\varphi(k)}{dk^2}\Big|_{k=k_0} \tag{4.34}
$$

を意味します. この条件の下で $g(x,t)$ は,

$$
\begin{aligned}
g(x,t)\Big|_{t\to\infty} &\approx e^{ik_0x-i\omega_0t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}|G_0|e^{i\varphi_0+ik\varphi_0'+\frac{1}{2}k^2\varphi_0''}A(k)e^{ik(x-v_gt)} && (4.35a)\\
&= |G_0|e^{ik_0x-i\omega_0t+i\varphi_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}A(k)e^{\frac{i}{2}k^2\varphi_0''}\cdot e^{ik(x-v_gt+\varphi_0')} && (4.35b)\\
&= |G_0|e^{ik_0x-i\omega_0t+i\varphi_0}I(x-v_gt+\varphi_0') && (4.35c)
\end{aligned}
$$

となります. ここで,

$$
I(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}A(k)e^{\frac{i}{2}k^2\varphi_0''}\cdot e^{ikx} \tag{4.36}
$$

を定義しました. さて, これからの目標は Eq. (4.35) を評価すること, 特に Eq. (4.36) を評価することです. もし, 包絡線 $A(x)$ が平行移動または拡大縮小で表すことができなくなれば, 拡散を説明することができます.

積分の評価には様々な方法があると思いますが, 著者が思いついた方法は次の 3 種があり, 成功した 2 種を説明します.

1. $e^{\frac{i}{2}k^2\varphi_0''}$ を $k=k_0$ 周りでテーラー展開

   → 失敗. 複素数の定数倍の違いしか現れない.

2. $\varphi''\to\infty$ を仮定して鞍点法 (the steepest descent) で評価する

   → 成功. ある程度一般的な議論ができるが, $A(k)$ は緩やかに変化していなければならない点と $\varphi''\to\infty$ の制限が付く.

3. $A(k)$ がガウス関数を仮定して積分を計算する

   → 成功. 新たな近似を含まず, 正確だがこの場合しか議論できない.

楽に考えたい場合は包絡線がガウス関数の場合だけを考えればよいかと思います. 本稿ではこれで十分です.

4.3.1 $\varphi''\to\infty$ を仮定して鞍点法で評価する

この仮定は相互作用を起こす媒質の分散が非常に高いことを想定して解いていきます. 実際にどこまで使用できるかは, 解いた後の結果を考察することで判明するだろうと期待しておきます.

先に結論を言えば, 鞍点法を用いた場合は以下の通りになります.

$$I(x)\Big|_{\varphi''\to\infty}=\frac{e^{i\pi/4}}{|2\pi\varphi_0''|^{1/2}}\cdot A(k=-\tfrac{x}{\varphi_0''})\cdot e^{-\frac{i}{2\varphi_0''}x^2} \tag{4.37}$$

ここで, $A(k)$ は $A(x)$ のフーリエ変換で,

$$A(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dxA(x)e^{-ikx} \tag{4.38}$$

です. 計算過程のヒントや, 鞍点法とは？については参考文献 [1] をご覧ください. つまり鞍点法が使用できる場合,

$$g(x,t)\Big|_{\substack{t\to\infty\\ \varphi''\to\infty}}=|G_0|e^{ik_0x-i\omega_0t+i\varphi_0}\frac{e^{i\pi/4}}{|2\pi\varphi_0''|^{1/2}}\cdot A\left(k=-\frac{x-v_gt+\varphi_0'}{\varphi_0''}\right)\cdot e^{-\frac{i}{2\varphi_0''}(x-v_gt+\varphi_0')^2} \tag{4.39}$$

となります.

特に $A(x)$ がガウス関数, つまり $A(x)=e^{-(x/a)^2}$ で表せる場合,

$$g(x,t)\Big|_{\substack{t\to\infty\\ \varphi''\to\infty}}=|G_0|e^{ik_0x-i\omega_0t+i\varphi_0}\cdot\frac{ae^{i\pi/4}}{|2\varphi_0''|^{1/2}}\cdot e^{-\left(\frac{a^2}{4\varphi_0''^2}+\frac{i}{2\varphi_0''}\right)(x-v_gt+\varphi_0')^2} \tag{4.40}$$

となります.

4.3.2 $A(x)$ がガウス関数を仮定して積分を計算する

$$A(x) = e^{-(x/a)^2} \tag{4.41}$$

の場合,

$$A(k) = a\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}(ak)^2} \tag{4.42}$$

ですので, 代入すると

$$\begin{aligned} I(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} a\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}(ak)^2} e^{\frac{i}{2}k^2\varphi_0''} \cdot e^{ikx} && (4.43) \\ &= a\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}(a^2-2i\varphi_0'')k^2} e^{ikx} && (4.44) \\ &= \frac{a}{(a^2-2i\varphi_0'')^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{a^2-2i\varphi_0''}} && (4.45) \end{aligned}$$

を得ます. つまり,

$$g(x,t)\Big|_{t\to\infty} = |G_0|e^{ik_0x-i\omega_0t+i\varphi_0} \cdot \frac{a}{(a^2-2i\varphi_0'')^{1/2}} e^{-\frac{(x-v_gt+\varphi_0')^2}{a^2-2i\varphi_0''}} \tag{4.46}$$

と計算できます.

$A(x)$ がガウス関数の場合を見ますと, Eq. (4.40) は $\left|\frac{a^2}{2\varphi_0''}\right| \ll 1$ で Eq. (4.46) に一致することが確認できます.

4.3.3 比較

さて厳密に解けてしまった具体的な関数 Eq. (4.46) を元に，どのようなことが言えるか考えてみましょう．初期状態との比較を考えてみますと，

$$
\begin{aligned}
f_0(x,t) &= e^{ik_0x-\omega_0t} \qquad\qquad e^{-\frac{(x-v_gt)^2}{a^2}} && \text{(4.47a)}\\
g(x,t)\Big|_{t\to\infty} &= |G_0|e^{ik_0x-i\omega_0t+i\varphi_0}\cdot\frac{a}{(a^2-2i\varphi_0'')^{1/2}}e^{-\frac{(x-v_gt+\varphi_0')^2}{a^2-2i\varphi_0''}} && \text{(4.47b)}
\end{aligned}
$$

となります．特に重要な箇所は, Eq. (4.47a), Eq. (4.47b) の最後の項です．分母の $a^2-2i\varphi_0''$ は，f_0 の同項の分母 a^2 に比べてその絶対値が大きくなります．これは波形の広がり，特に包絡線が元の波形から広がることを示しています．つまり，平行移動と定数倍では表現できなくなることを意味しています．そして波は広がることを意味します．

そのため，相互作用を及ぼす領域のグリーン関数の位相の，搬送波波数 k_0 における二階導関数 $\varphi_0''(=\frac{d^2\varphi}{dk^2}|_{k=k_0})$ は波形の広がり方に対して重要ということが分かります．つまり，$\varphi_0''\neq 0$ によって元の波形が崩れてしまうんですね．もしも $\varphi_0''=0$ であるならば，Eq. (4.47b) は Eq. (4.29b) に一致することが容易に分かりますので，その場合は波形は定数倍だけ小さくなるだけで元の波形が崩れてしまうことはありません．

ついでですので，初期状態のまま動いた場合，相互作用を鞍点法で評価した場合，厳密に評価した場合をグラフにして比較してみましょう．鞍点法の適用範囲も同時に見るために，$|a^2/(2\varphi_0'')|=0.1, 0.5, 1$ の時に比較したものを Fig. 8, Fig. 9, Fig. 10 に示しています．$|a^2/(2\varphi_0'')|$ がゼロに近いときに鞍点法が良く働くことが分かります．

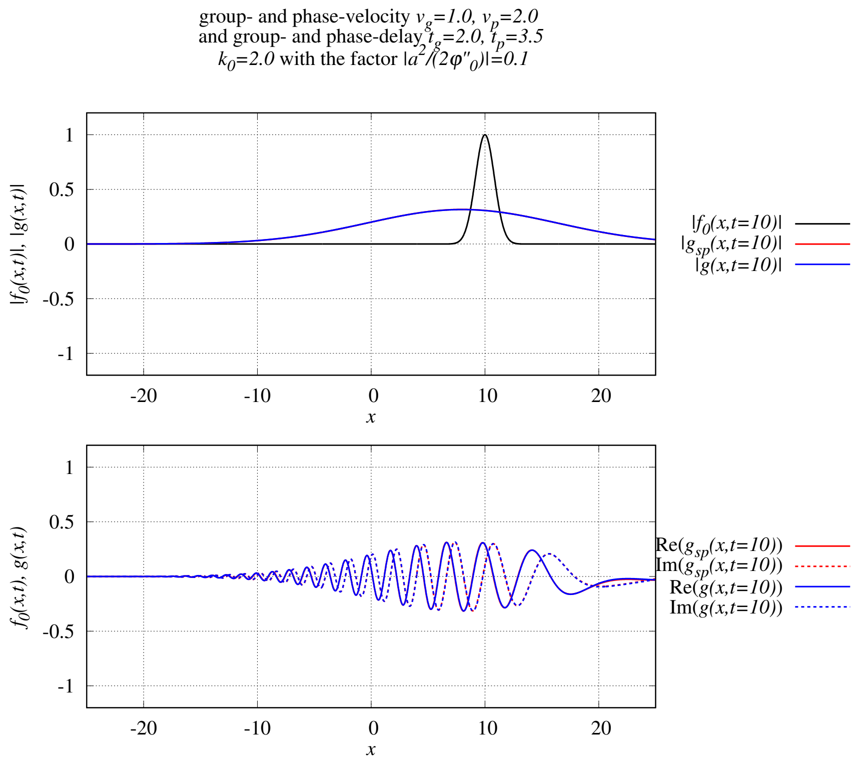

Figure 8: $k_0 = 2$ を持つガウス関数の包絡線を持つ波形が相互作用の影響を受け無かった時の波 Eq. (4.47a), 相互作用の影響を鞍点法によって評価した波 (4.40), 相互作用の影響を本文中で示した k の次数の範囲内で厳密に評価した波 (4.46) の様子. $|a^2/(2\varphi''_0)| = 0.1$ となるように計算

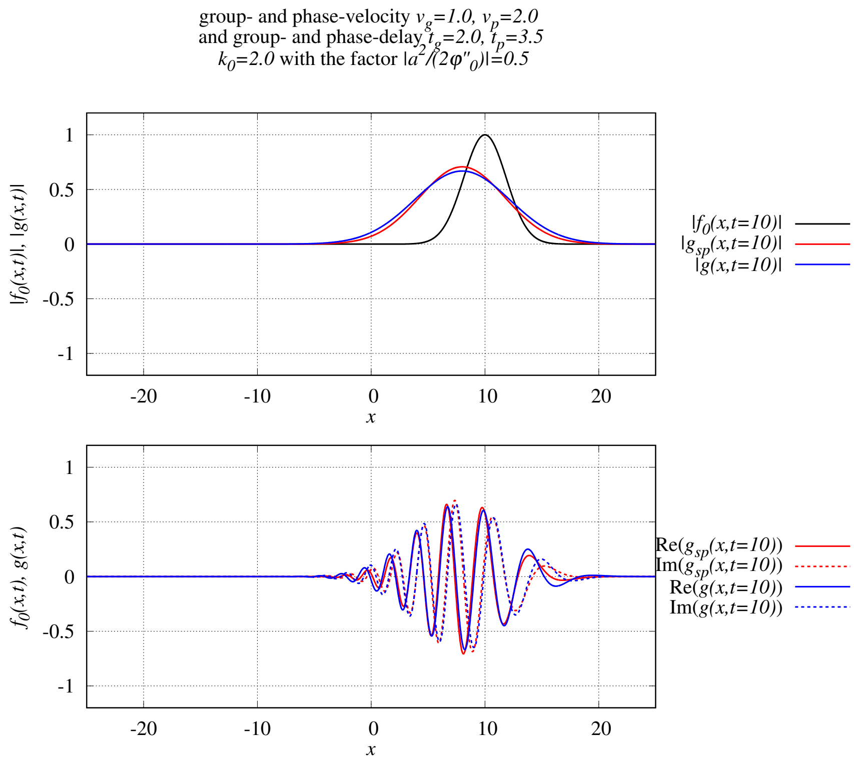

Figure 9: Fig. 8 と同じ. ただし, $|a^2/(2\varphi''_0)| = 0.5$ で計算.

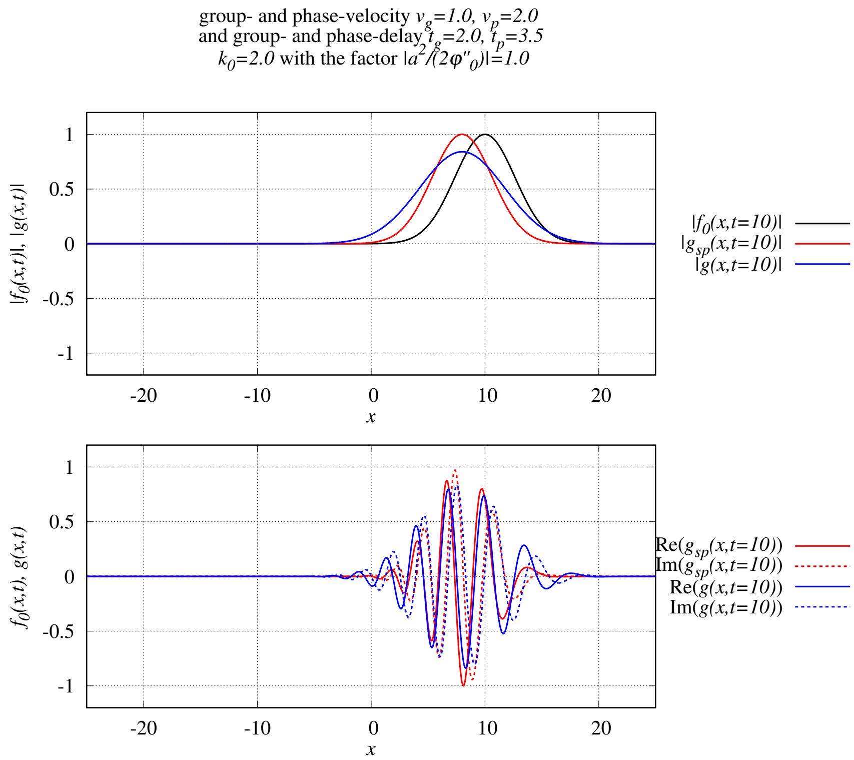

Figure 10: Fig. 8 と同じ．ただし，$|a^2/(2\varphi_0'')| = 1$ で計算．

A　特別な場合に一価関数で分散関係を表現して良いのはなぜか?

ここでは,

$$f(x,t) \approx \int \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ikx - i\omega(k)t} \tag{A.1}$$

で書く時の波の表現についてもう少し説明しようと思います. Eq. (A.1) が使えるのは, 多価関数である分散関係の一部分だけで波が書け, その一部分は分散関係が一価関数表現できる場合の波を対象に表現する場合です.

本文中でも説明したとおり, $\omega = \omega(k)$ は一般的には多価関数となりますので, Eq. (A.1) はいつでも使用できるような波の表記ではありません.

例えば"古典的な波動方程式に従う"という条件が付いていたとしても, Eq. (A.1) は完全ではありません. まずはそれを証明してみましょう. 古典的な波動方程式は波の速度の大きさ $v \geq 0$ を用いて

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{A.2}$$

で書けているため, 波の一般的な表現

$$f(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} \tag{A.3}$$

を代入して整理すれば

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t}\right] = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t}\right] \tag{A.4a}$$

$$\int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} (-\omega^2) f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} = v^2 \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} (-k^2) f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} \tag{A.4b}$$

$$\int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} (\omega^2 - v^2 k^2) f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} = 0 \tag{A.4c}$$

となるため, $f(k,\omega)$ に関わらず Eq. (A.4c) が成立するためには

$$\omega^2 = v^2 k^2 \tag{A.5}$$

が満たされなければなりません. ω について解けば, 分散関係 $\omega = \pm vk$ が導かれます. Eq. (A.7) に分散関係を組み込む事を考え制限を加えると

$$f(k,\omega) = f_1(k,\omega) \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_1) + f_2(k,\omega) \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_2) \tag{A.6}$$

の形である必要があります. ここで, $\omega_1 \equiv vk,\ \omega_2 \equiv -vk$ と定義しました. よって,

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[f_1(k,\omega) \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_1) + f_2(k,\omega) \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_2)\right] e^{ikx} e^{-i\omega t} && \text{(A.7)} \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} \left[f_1(k,\omega_1) e^{ikx} e^{-i\omega_1 t} + f_2(k,\omega_2) e^{ikx} e^{-i\omega_2 t}\right] && \text{(A.8)} \end{aligned}$$

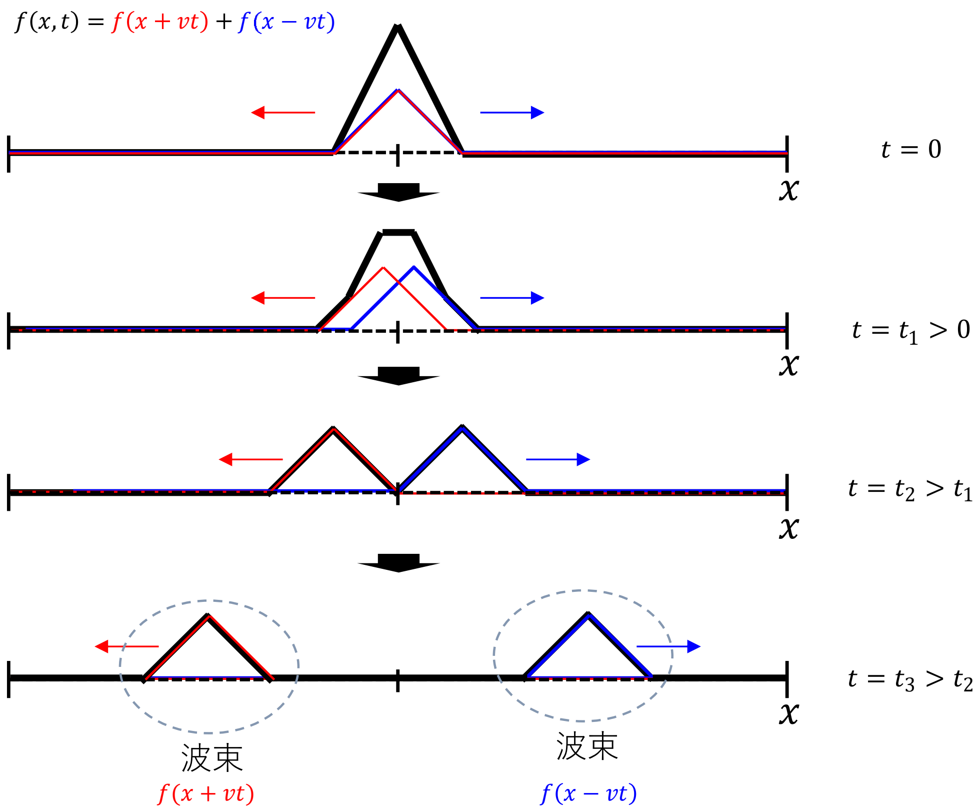

Figure 11: 古典的な波動方程式に従う紐の一部をつまみ上げ, 静止した状態から静かに離した場合の波の振る舞い

となります．2つの項が現れているので, Eq. (A.1) では書けない波があることが分かりました．そのため, Eq. (A.1) は十分な波の表記ではないんですね．

ではなぜ Eq. (A.1) なんかを考えるのか？というと, 似たような動きをする波を対象とする場合, 例えば有限範囲にだけ存在する波束が一方向に進んでいる波を対象とするとき, Eq. (A.1) で書くことができるからです．

例えば一方向に進行する波の塊（波束）を古典的な波動方程式で考えてみましょう．この波は, 紐の一部分だけをつまみ上げ, 静止した状態から静かに手を離した後, 十分時間が経過した波形を見ると, 空間的に独立した二つの波で書くことができます．例えば思考実験的に片方の波の振幅が急にゼロになったと考えても, その影響はもう片方の波に影響を与えないことは想像に難くないですよね．つまり, 孤立する進行波が存在し得る訳です．

B 時間 2 階, 空間 2 階の偏微分方程式の分散関係

時間 2 階, 空間 2 階の偏微分の方程式として代表的なのは, 古典的な波の波動方程式です. つまり, 偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{B.1}$$

を考えます. 波の表現 Eq. (A.1) を代入すれば,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \frac{dk}{2\pi}\int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega)e^{ikx}e^{-i\omega t} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int \frac{dk}{2\pi}\int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega)e^{ikx}e^{-i\omega t} \tag{B.2a}$$

$$\int \frac{dk}{2\pi}\int \frac{d\omega}{2\pi}(-\omega^2) f(k,\omega)e^{ikx}e^{-i\omega t} = \alpha\int \frac{dk}{2\pi}\int \frac{d\omega}{2\pi}(-k^2) f(k,\omega)e^{ikx}e^{-i\omega t} \tag{B.2b}$$

$$\int \frac{dk}{2\pi}\int \frac{d\omega}{2\pi}(\omega^2-\alpha k^2) f(k,\omega)e^{ikx}e^{-i\omega t} = 0 \tag{B.2c}$$

となります. Eq. (B.2c) が任意の $f(k,\omega)$ について成り立つのであれば,

$$\omega^2 + \alpha k^2 = 0 \tag{B.3}$$

が満たされなければなりません. よって分散関係は

$$\omega = \pm\sqrt{\alpha}\ k \tag{B.4}$$

となります.

この分散関係という制限を $f(k,\omega)$ に加えると,

$$f(k,\omega) = f_1(k)\cdot 2\pi\delta(\omega-\sqrt{\alpha}k) + f_2(k)\cdot 2\pi\delta(\omega+\sqrt{\alpha}k) \tag{B.5}$$

となります. よって, 古典的な波の波動方程式の一般解 $f(x,t)$ は

$$f(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi}\int \frac{d\omega}{2\pi}\left[f_1(k)\cdot 2\pi\delta(\omega-\sqrt{\alpha}k) + f_2(k)\cdot 2\pi\delta(\omega+\sqrt{\alpha}k)\right]e^{ikx}e^{-i\omega t} \tag{B.6}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi}\left[f_1(k)e^{i(kx-\sqrt{\alpha}kt)} + f_2(k)e^{i(kx+\sqrt{\alpha}kt)}\right] \tag{B.7}$$

と簡略化することができます.

C 時間 1 階, 空間 2 階の偏微分方程式の分散関係

時間 1 階, 空間 2 階の偏微分の方程式として代表的なのは, 時間依存するシュレーディンガー方程式です. つまり, 偏微分方程式

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \beta(x,t) f(x,t) \tag{C.1}$$

を考えます. 波の表現 Eq. (A.1) を代入する前に, Eq. (C.1) の右辺第 2 項について先に考えてみましょう. 今, $\beta(x,t)$ が

$$\beta(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \beta(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} \tag{C.2}$$

と表されているとき,

$$\begin{aligned}
\beta(x,t)f(x,t) &= \int \frac{dk'}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \beta(k',\omega') e^{ik'x} e^{-i\omega' t} \cdot \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} && \text{(C.3a)} \\
&= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \beta(k',\omega') f(k,\omega) e^{i(k+k')x} e^{-i(\omega+\omega')t} && \text{(C.3b)} \\
&= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk'}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \beta(k-k',\omega-\omega') f(k',\omega') e^{ikx} e^{-i\omega t} && \text{(C.3c)}
\end{aligned}$$

と変形できます. Eq. (C.1) に波の表現 (??) と Eq. (C.3c) の結果を代入して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} \\
&\quad + \int \frac{dk'}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \beta(k',\omega') e^{ik'x} e^{-i\omega' t} \cdot \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} f(k,\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} && \text{(C.4a)}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \left[-i\omega f(k,\omega) + \alpha k^2 f(k,\omega) - \int \frac{dk'}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \beta(k-k',\omega-\omega') f(k',\omega') \right] e^{ikx} e^{-i\omega t} = 0 \tag{C.4b}$$

となります. Eq. (C.4b) が任意の k, ω について成り立つのであれば, 括弧内 [ ] はゼロにならなければなりません. そのことから分散関係

$$-i\omega f(k,\omega) + \alpha k^2 f(k,\omega) - \int \frac{dk'}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \beta(k-k',\omega-\omega') f(k',\omega') = 0 \tag{C.5}$$

を得ます. Eq. (C.5) の中で変数は k, ω であり, Eq. (C.5) はこの関係式を示しています. もし Eq. (C.5) が解けたならば, 分散関係

$$\omega = \omega_j(k), \quad (j = 1, 2, \cdots, J(k)) \tag{C.6}$$

が導かれます. よって

$$f(k,\omega) = \sum_{j=1}^{J(k)} f_j(k) \cdot 2\pi \delta(\omega - \omega_j(k)) \tag{C.7}$$

と書くことができるので,

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{j=1}^{J(k)} f_j(k) \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_j(k)) \cdot e^{ikx} e^{-i\omega t} && \text{(C.8a)} \\
&= \sum_{j=1}^{J(k)} \int \frac{dk}{2\pi} f_j(k) e^{i[kx - \omega_j(k)t]} && \text{(C.8b)}
\end{aligned}
$$

が解となります.

C.1　周期ポテンシャルの場合の例題

特に, 良く挙げられる例題として時間に依存しない周期ポテンシャル中の電子の問題が挙げられます. つまり,

$$
\begin{aligned}
\beta(x,t) &= \beta_0 \cos(k_0 x) && \text{(C.9a)} \\
&= \frac{\beta_0}{2} \left[e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x} \right] && \text{(C.9b)}
\end{aligned}
$$

を仮定しましょう. ここで, β_0 は適当な定数です. $\beta(k,\omega)$ を求めるために, 逆フーリエ変換 (通常の定義とは指数関数の符号分だけ違うので注意)

$$
\beta(k,\omega) = \int dt \int dx \beta(x,t) e^{-ikx} e^{i\omega t} \tag{C.10}
$$

に代入すれば,

$$
\begin{aligned}
\beta(k,\omega) &= \int dt \int dx \beta_0 \cos(k_0 x) e^{-ikx} e^{i\omega t} && \text{(C.11a)} \\
&= \beta_0 \int \cos(k_0 x) e^{-ikx} dx \cdot \int e^{i\omega t} dt && \text{(C.11b)} \\
&= \frac{\beta_0}{2} \int \left[e^{-i(k-k_0)x} + e^{-i(k+k_0)x} \right] dx \cdot 2\pi\delta(\omega) && \text{(C.11c)} \\
&= 2\pi^2 \beta_0 \cdot \left[\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0) \right] \delta(\omega) && \text{(C.11d)}
\end{aligned}
$$

と書けます. これを分散関係 (C.5) に代入すれば,

$$
\begin{aligned}
& -i\omega f(k,\omega) + \alpha k^2 f(k,\omega) \\
& \qquad -2\pi^2 \beta_0 \int \frac{dk'}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left[\delta(k - k_0 - k')) + \delta(k + k_0 - k') \right] \delta(\omega - \omega') f(k',\omega') = 0
\end{aligned} \tag{C.12a}
$$

$$
-i\omega f(k,\omega) + \alpha k^2 f(k,\omega) - \frac{\beta_0}{2} \big[f(k-k_0,\omega) + f(k+k_0,\omega) \big] = 0 \tag{C.12b}
$$

$$
-\frac{\beta_0}{2} f(k-k_0,\omega) + \left(-i\omega + \alpha k^2 \right) f(k,\omega) - \frac{\beta_0}{2} f(k+k_0,\omega) = 0 \tag{C.12c}
$$

を得ます. Eq. (C.12c) を見ると k は異なる値が別の $k \pm k_0$ に影響しているのに対し, ω が変化することが無いと分かります. つまり,

$$ag(k-k_0) + b(k)g(k) + ag(k-k_0) = 0 \tag{C.13}$$

の形をしていることが分かります. これは, 行列形式で書けば,

$$\begin{pmatrix} & \ddots & & & & & \\ & a & b(k-k_0) & a & 0 & \cdots & \\ \cdots & 0 & a & b(k) & a & 0 & \cdots \\ & \cdots & 0 & a & b(k+k_0) & a & \cdots \\ & & \cdots & 0 & a & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ g(k-k_0) \\ g(k) \\ g(k+k_0) \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{C.14}$$

という構造の式に等しいです.

ここまで式変形ができたら, 次は物理的に意味のある非自明な答えを探すことが目的です. そこで, 左辺の三重対角行列の行列式=0 を解けばよいのですが, 現状では位置 x に周期境界条件を入れなかったために, 決定できません. そのため, あらわに解くことはしないでここで留めておきます.

以上の議論から分散関係について分かることは, 周期ポテンシャル中のシュレーディンガー方程式の解は, 周期ポテンシャル自体が持つ波数の間隔で, 離散的な波数しか持つことができない点です.

D　コメント

これだけ式変形が必要だったら, cos 波を二つ合わせてなんちゃってうなりで説明しようとする気持ちも分かります. ですが, そのままだと大切な仮定である, 二つの波の波数は明らかに分離できるほど異なっていなければならない, という仮定が無くなってしまいます.

群速度の質問で,『3 つの正弦波で重ね合わせたら, 群速度はどうやって定義すればいいんですか？』ときたらなかなか難しいのではないでしょうか. その点, 包絡線と搬送波を明確に区別できる状況でなければ群速度・位相速度は定義できないとする本稿の定義では, この問題は起こりません. なぜなら, その三つの中で, 飛びぬけて波数が大きいものがいれば, それが位相, それ以外は包絡線だ, となります. また, 同じくらい間隔で 3 つの波数がいたら, その状況では群速度は定義できない. が答えとなります. なにが包絡線で, 何が搬送波なのか分かりませんからね.

Reference

[1] 小高正嗣，山本哲生著『複素解析』, 7.4 鞍点法のまとめ, p57 http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/~keikei/lecture/math-note.pdf