

球体の空気抵抗と抗力係数

シキノ *

May 15, 2022

Contents

1	まとめ	2
2	完全な球体の空気抵抗	3
2.1	流体の流れが無い場合	3
2.2	流体の流れがある場合	5
2.3	BB 弾の場合	6
3	詳細	7
3.1	抗力係数のマッハ数に対する拡張 [1]	7
3.2	温度, 圧力, 湿度を考慮した抗力係数 (空気中)	9
3.3	温度, 圧力, 湿度と空気の粘性率, 密度, 音速の関係式	10

*<https://slpr.sakura.ne.jp/qp/>, <https://twitter.com/sikinote>

1 まとめ

完全な球体の抗力係数 C_d における近似式は、以下の通り与えられます。

- $R_e < 2 \times 10^5$, 層流領域のみ (本文中 Eq. (9))

$$C_d(R_e) = \left[\frac{24}{R_e} (1 + 0.15 R_e^{0.687}) \right] + \frac{0.42}{1 + \left(\frac{42500}{R_e^{1.16}} \right)}, \quad (1)$$

$$\text{for } R_e < 2 \times 10^5 \text{ and } K_n < 0.01 \text{ and } M_a \rightarrow 0 \quad (2)$$

- $R_e < 2 \times 10^5$, 層流領域のみ, マッハ数依存性込み (本文中 Eq. (23))

$$C_d(R_e) = \frac{24}{R_e} (1 + 0.15 R_e^{0.687}) H_M + \frac{0.42 C_M}{1 + \left(\frac{42500}{R_e^{1.16 C_M}} \right) + \frac{G_M}{R_e^{0.5}}} \quad (3)$$

$$\text{for } 45 < R_e < R_{e,\text{crit}} \quad (4)$$

$$C_M = \begin{cases} 1.65 + 0.65 \tanh(4M_a - 3.4) & \text{for } M_a < 1.5 \\ 2.18 - 0.13 \tanh(0.9M_a - 2.7) & \text{for } M_a > 1.5 \end{cases} \quad (5a)$$

$$\quad (5b)$$

$$G_M = \begin{cases} 166M_a^3 + 3.29M_a^2 - 10.9M_a + 20 & \text{for } M_a < 0.8 \\ 5 + 40M_a^{-3} & \text{for } M_a > 0.8 \end{cases} \quad (5c)$$

$$\quad (5d)$$

$$H_M = \begin{cases} 0.0239M_a^3 + 0.212M_a^2 - 0.074M_a + 1 & \text{for } M_a < 1 \\ 0.93 + \frac{1}{3.5 + M_a^5} & \text{for } M_a > 1 \end{cases} \quad (5e)$$

$$\quad (5f)$$

- 定性的, 広範囲 (本文中 Eq. (11))

$$C_d = \frac{24}{R_e} + \frac{2.6 \left(\frac{R_e}{5.0} \right)}{1 + \left(\frac{R_e}{5.0} \right)^{1.52}} + \frac{0.411 \left(\frac{R_e}{263000} \right)^{-7.94}}{1 + \left(\frac{R_e}{263000} \right)^{-8.00}} + \left(\frac{0.25 \frac{R_e}{10^6}}{1 + \frac{R_e}{10^6}} \right) \quad (6)$$

で与えられます。対象物が流体中を高速で動かなければ、層流領域で実験値と良く合う Eq. (1), Eq. (3) で十分でしょう。温度なども含めたいならば、レイノルズ数, マッハ数を Eq. (28)~Eq. (31) で置き換えて利用することを勧めます。また精度はあまりいらぬ状況で、定性的な理解だけを対象とするならば、乱流領域の振る舞いを含む Eq. (6) を用いると良いです。

2 完全な球体の空気抵抗

2.1 流体の流れが無い場合

速度 $v(= |\mathbf{v}|)$ で動く半径 R の完全な球体に働く空気抵抗力の大きさ $F_d(= |\mathbf{F}_d|)$ は,

$$F_d = \frac{1}{2} C_d(R_e) \rho \pi R^2 v^2 \quad (7)$$

と書けます. 空気抵抗力 \mathbf{F}_d は, 球体の速度方向と反対に働くので, 方向を含めれば

$$\mathbf{F}_d = -\frac{1}{2} C_d(R_e) \rho \pi R^2 v^2 \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (8)$$

と書けます.

Table 1: aa

記号	単位	説明
$C_d = C_d(R_e)$	(無次元)	抗力係数, Drag coefficient
$R_e = v\rho L/\eta$	(無次元)	レイノルズ数, Reynolds number.
ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	空気の密度
η	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	空気の粘性率, Viscosity. (動粘度ではありません)
v	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	球体の速度の大きさ
$L = 2R$	m	球体の直径
R	m	球体の半径

抗力係数 C_d はレイノルズ数 R_e の関数であり, 実験的に求められた結果を R_e の関数としてフィッティングし, 使用されます. C_d は流体中 (ここでは空気中) を動く対象物の形状に大きく依存するため, 形状が違う場合, 別の形状の C_d を使用すると誤差が大きくなることがあります. 本稿では, 対象物として完全な球体のみを考えていきます.

完全な球体の場合, 抗力係数 C_d は近似的に

$$C_d(R_e) = \left[\frac{24}{R_e} (1 + 0.15 R_e^{0.687}) \right] + \frac{0.42}{1 + \left(\frac{42500}{R_e^{1.16}} \right)}, \quad (9)$$

$$\text{for } R_e < 2 \times 10^5 \text{ and } K_n < 0.01 \text{ and } M_a \rightarrow 0 \quad (10)$$

で与えられます. ここで, $K_n = l_{m-m}/d$ はクヌーセン数 (Knudsen number) で, 平均自由行程 l_{m-m} を用いて $K_n = \frac{l_{m-m}}{L}$ で与えられます. また, $M_a = v/c$ はマッハ数 (Mach number) であり, 流体の音速 c と球体が動く速度の比です.

$$M_a \approx 0.2 \sim 0.3$$

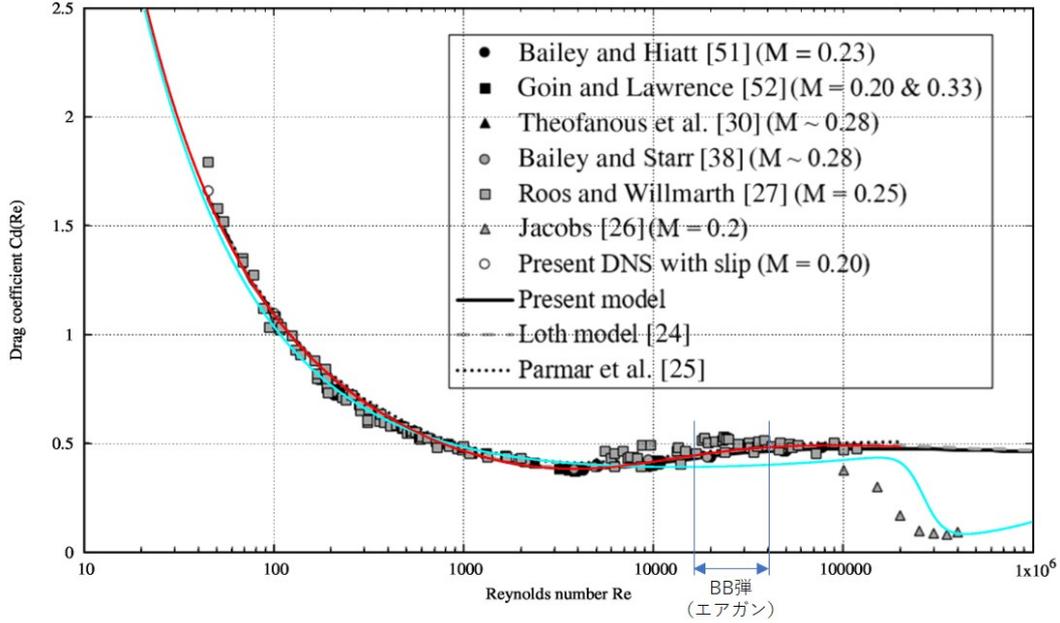


Figure 1: [1] の Fig. 7(a) を編集し引用. エアガンから射出する BB 弾のマッハ数 (0.12 ~ 0.29) と近い場合の抗力係数. 赤線は Eq. (9), 青線は Eq. (11) であり, $Re = 10^4 \sim 10^5$ 辺りで C_d に実験値と 0.1 位の差が生じている.

Eq. (9) が使用できる条件 $Re > 2 \times 10^5$ は, 流体の振る舞いが層流領域から乱流領域 (空気抵抗値が急に下がる領域) に変化する境界値であり, その境界値は Critical Reynolds number Re_{crit} と呼ばれています. どうか, Re を増加させたときに $C_d(Re) = 0.3$ と初めてなる時の値を Re_{crit} と定義しているようです [1].

つまり, Eq. (9) は層流領域でしか使えない近似式となっています. 例えば, ゴルフでゴルフボールを飛ばすことを考える際は乱流領域が入ってくるので, この近似式は使用することができません (表面の凸凹のため, そもそも抗力係数のグラフが変わります).

もしも精度が必要ではないけれども, 乱流領域を含めて抗力係数の定性的な性質を取り込みたければ, F. A. Morrison による以下のフィッティング式を用いると良いです [4](Fig. 1 水色線参照).

$$C_d = \frac{24}{Re} + \frac{2.6 \left(\frac{Re}{5.0}\right)}{1 + \left(\frac{Re}{5.0}\right)^{1.52}} + \frac{0.411 \left(\frac{Re}{263000}\right)^{-7.94}}{1 + \left(\frac{Re}{263000}\right)^{-8.00}} + \left(\frac{0.25 \frac{Re}{10^6}}{1 + \frac{Re}{10^6}}\right) \quad (11)$$

ただし, $Re = 10^4 \sim 10^5$ 辺りで既に C_d に実験値と 25%位の差 ($C_d = 0.4$ に対する 0.1 のずれ) が生じますので, 精度はこれくらいです. 比較は Fig. 1 をご覧ください.

2.2 流体の流れがある場合

速度が相対速度 \mathbf{w} に変わります. つまり

$$\mathbf{w} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad (12)$$

$$w \equiv |\mathbf{w}| \quad (13)$$

を定義して,

$$\mathbf{F}_d = -\frac{1}{2}C_d(R_e)\rho\pi R^2w^2\frac{\mathbf{w}}{w} \quad (14)$$

となり, レイノルズ数は

$$R_e = w\rho L/\eta \quad (15)$$

で定義されます.

2.3 BB 弾の場合

サバイバルゲームで使用されるエアガンから発射される BB 弾を例にとって, Eq. (9) が使用可能か調べてみます. 無風状態を考えますと BB 弾の速度 v , BB 弾の直径 L は

$$v = 40 \sim 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (16a)$$

$$L = 6 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (16b)$$

となります. 流体である空気の定数 (平均自由行程 l_{m-m} , 密度 ρ , 粘性率 η) は, 空气中 (1 気圧, 20 °C) において [2][3],

$$l_{m-m} = 65 \times 10^{-9} \text{ m} \quad (17)$$

$$\rho = 1.205 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (18)$$

$$\eta = 1.822 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (19)$$

となります. よって, 流れを決めるパラメータであるクヌーセン数 K_n , マッハ数 M_a , レイノルズ数 R_e はおおよそ

$$K_n = \frac{l_{m-m}}{L} = \frac{65 \times 10^{-9} \text{ m}}{6 \times 10^{-3} \text{ m}} \approx 1 \times 10^{-5} \quad (20)$$

$$M_a = \frac{v}{a_g} = \frac{40 \sim 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \approx 0.12 \sim 0.29 \quad (21)$$

$$R_e = \frac{v\rho L}{\eta} \approx 15000 \sim 40000 \quad (22)$$

の値を取ることが分かります.

Eq. (10) の範囲を見ると, $K_n < 0.01$ であり, レイノルズ数の範囲も $R_{e,\text{crit}}$ より低いので層流領域であることから, Eq. (9) を使用することができます. マッハ数は 0 に近いべきで, 0.2 は音速に比べて低いと言えるでしょう. 実際, [1] にある $M_a \approx 0.2$ の実験値と Eq. (9) 比べてみたところ, 十分に一致していると言えます. つまり, サバイバルゲームの, エアガンから射出される BB 弾については Eq. (9) は使用可能, ということです.

3 詳細

3.1 抗力係数のマッハ数に対する拡張 [1]

完全な球体の場合, 抗力係数 C_d は,

- クヌーセン数 (Knudsen number) $K_n = l_{m-m}/d$
- マッハ数 (Mach number) $M_a = w/c$
- レイノルズ数 (Reynolds number) $Re = w\rho L/\eta$

によって変化します.

クヌーセン数は, 流体の平均自由行程と流体中に存在する対象物の大きさとの比を表していて, 対象物にとって流体が滑らかな流体として見えているのか, ある程度粒々な流体として見えているかを表す量です.

マッハ数は, 対象物の速さとその流体の音速との比です. 流体が圧縮されるほどの速さで動いているかどうかを能わす量です. おおむね 0.3 より大きいと圧縮性を無視することができなくなるようです (wikipedia).

レイノルズ数は, 流体の慣性力 (物体が運動状態を維持しようとする力) と粘性力 (境界と接している部分に釣られて流体が動こうとする力) の比で定義される量です [6]. 大雑把には, 流体に引きずられて対象の運動に作用するか (慣性力 \gg 粘性力, $Re \gg 1$), 対象の運動に引きずられて流体の運動に作用するか (粘性力 \gg 慣性力, $Re \ll 1$) を示す量ということです. 多くの問題においては, 基本的には慣性力の方が粘性力よりも重要となります.

さて, 論文 [1] は 1971 年の論文 [5] で提示されている層流領域 (おおよそ $Re < 2 \times 10^5$) かつ $K_n \rightarrow 0, M_a \rightarrow 0$ を考えたときの近似式 Eq. (9) を元に, マッハ数を抗力係数に組み込むことを行っております. 論文 [1] で提案されている抗力係数はより広いマッハ数に対応したフィッティングであり, 以下の Eq. (23) で与えられています.

抗力係数

$$C_d(R_e) = \frac{24}{R_e}(1 + 0.15R_e^{0.687})H_M + \frac{0.42C_M}{1 + \left(\frac{42500}{R_e^{1.16C_M}}\right) + \frac{G_M}{R_e^{0.5}}} \quad (23)$$

$$\text{for } 45 < R_e < R_{e,\text{crit}} \quad (24)$$

ここで C_M, G_M, H_M は以下の通り与えられます.

$$C_M = \begin{cases} 1.65 + 0.65 \tanh(4M_a - 3.4) & \text{for } M_a < 1.5 \\ 2.18 - 0.13 \tanh(0.9M_a - 2.7) & \text{for } M_a > 1.5 \end{cases} \quad (25a)$$

$$(25b)$$

$$G_M = \begin{cases} 166M_a^3 + 3.29M_a^2 - 10.9M_a + 20 & \text{for } M_a < 0.8 \\ 5 + 40M_a^{-3} & \text{for } M_a > 0.8 \end{cases} \quad (26a)$$

$$(26b)$$

$$H_M = \begin{cases} 0.0239M_a^3 + 0.212M_a^2 - 0.074M_a + 1 & \text{for } M_a < 1 \\ 0.93 + \frac{1}{3.5 + M_a^5} & \text{for } M_a > 1 \end{cases} \quad (27a)$$

$$(27b)$$

Eq. (23) は, $H_M = 1, C_M = 1, G_M = 0$ の時に Eq. (9) に等しくなります.

3.2 温度, 圧力, 湿度を考慮した抗力係数 (空気中)

空気中の場合に限り, 温度 T , 圧力 H , 湿度 ϕ を考慮して考えてみます. これらは, 粘性率 η , 空気の密度 ρ に主に影響を与えるため, レイノルズ数が変わります.

つまり, レイノルズ数はそれぞれの関数として $R_e = R_e(T, H, \phi, w)$ として与えられます. 結果として, その具体的な式は次の通り与えられます.

$$R_e = \frac{w\rho(T, H, \phi)L}{\eta(T)} \quad (28)$$

$$\eta(T) = 1.487 \times 10^{-6} \cdot \left(\frac{(T[^\circ\text{C}] + 273.15)^{3/2}}{T[^\circ\text{C}] + 390} \right) \quad (29)$$

$$\rho(T, H, \phi) = 0.003477 \cdot \frac{H[\text{Pa}]}{T[^\circ\text{C}] + 272.48} \cdot \left(1 - \phi \cdot \frac{230.9 \times 10^{\frac{7.5 \cdot T[^\circ\text{C}]}{T[^\circ\text{C}] + 237.3}}}{H[\text{Pa}]} \right) \quad (30)$$

ここで, 湿度 ϕ は 0 ~ 1 の範囲であり, パーセント表記ではないことに注意してください. また, 粘性率 η は数十気圧から数気圧の間, 圧力には依存しません.

Eq. (9) を用いる場合はレイノルズ数の修正だけで十分ですが, Eq. (23) に従う場合, マッハ数の修正も行わなければなりません. その修正は以下の通りとなります.

$$M_a = \frac{w}{c(T, H, \phi)} \quad (31)$$

$$c(T, H, \phi) = \frac{\rho(T, H, 0)}{\rho(T, H, \phi)} \cdot 20.05 \sqrt{T[^\circ\text{C}] + 273.15} \quad (32)$$

3.3 温度, 圧力, 湿度と空気の粘性率, 密度, 音速の関係式

以下は, 温度, 圧力, 湿度と空気の粘性率, 密度, 音速の関係式です. メモとして残しておきます.

Table 2: 変数の説明. 入出力は, 入力 (in) が引数となって出力 (out) が計算されることを意味する. また, ハイフンは途中で計算される物理的な意味を持つ変数である.

入出力	記号	単位	説明
-	ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	乾燥空気の密度
-	c	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	乾燥空気中の音速
in	T	$^{\circ}\text{C}, \text{K}$	空気の温度
in	ϕ	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	空気の相対湿度
in	H	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \text{Pa}$	空気の圧力
-	p	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \text{Pa}$	空気の水蒸気圧 (水蒸気分圧)
-	E	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \text{Pa}$	空気の飽和水蒸気圧
-	c'	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	水蒸気圧 p の空気中の音速
out	ρ_w	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	水蒸気圧 p の空気の密度
out	η_w	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	水蒸気圧 p の空気の密度

- 乾燥空気の密度 ρ [8]

$$\rho [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] = \frac{1.293}{1 + 0.00367 \cdot T[^{\circ}\text{C}]} \cdot \frac{H[\text{torr}]}{760} \quad (33)$$

(1[torr] = 133.322[Pa])

- 水蒸気圧 p の空気の密度 ρ_w [8]

$$\rho_w = \rho \left(1 - 0.378 \frac{p}{H} \right) \quad (34)$$

- 水蒸気圧 p の空気中の音速 c' [9]

$$c' = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{p}{H} \left(\frac{\gamma_w}{\gamma} - 0.622 \right)}} \quad (35)$$

ここで, γ, γ_w は乾燥空気, 水蒸気圧 p の空気の比熱比 (定圧比熱と定積比熱との比) です. ですが, 空気の比熱比は水蒸気の例えば [7] の Figure 3 (本稿の Fig. 2 に引用)

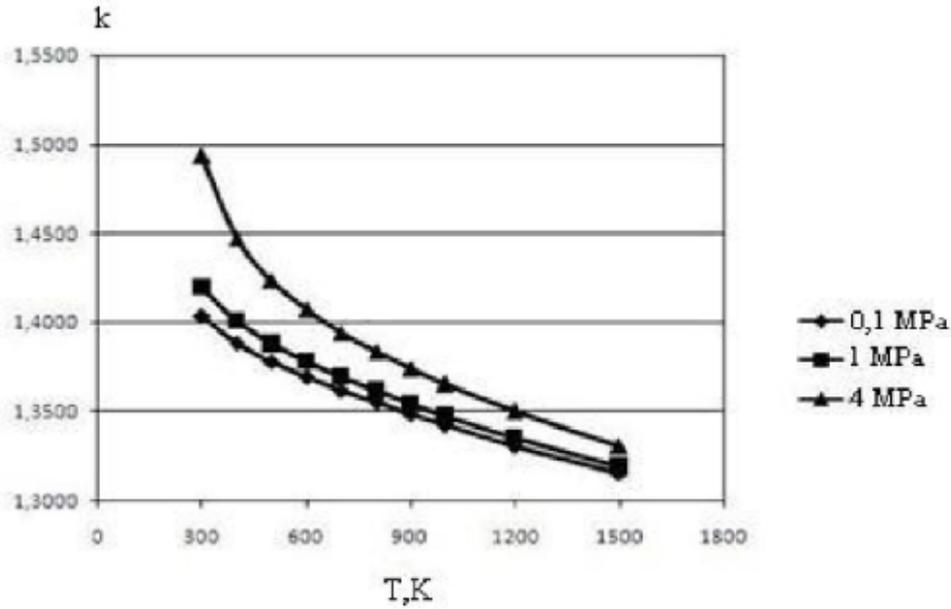


Figure 2: [7] の Figure 3 を引用. 縦軸は乾燥空気の比熱比, 横軸は絶対温度.

等にあるように, 空気の比熱比は温度・圧力に依存せず, ほぼ $\gamma \approx 1.400$ です. また, 100 度における水蒸気 100% の場合でも [12] より $\gamma_w = 1.33$ となります. よって, $\frac{\gamma_w}{\gamma} \approx 1$ として差し支えないでしょう. すると,

$$c' \approx \frac{c}{\sqrt{1 - 0.378 \frac{p}{H}}} = c \sqrt{\frac{\rho}{\rho_w}} \quad (36)$$

となります.

- 乾燥空気の音速 c [13],[14]

$$c [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}] = 20.05 \sqrt{T[\text{K}]} \quad (37)$$

音速は圧力にほとんど依存しないようです [9].

- 相対湿度 ϕ [15]

$$\phi = \frac{p}{E} \rightarrow p = \phi E \quad (38)$$

(ϕ の定義より, 空気の水蒸気圧と飽和水蒸気圧の比によって与えられます)

- 空気の飽和水蒸気圧を求める Tetens の式 [10]

$$E[\text{Pa}] = 100 \times 6.1078 \times 10^{\frac{7.5 \cdot T[^\circ\text{C}]}{T[^\circ\text{C}] + 237.3}} \quad (39)$$

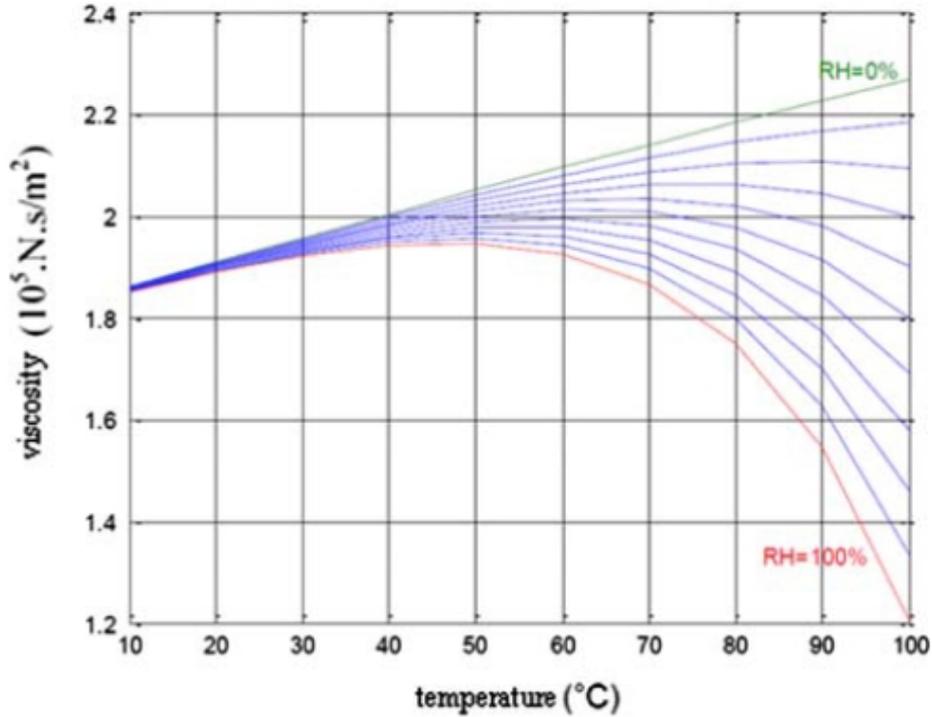


Figure 3: [16] の Figure 3 を引用. 縦軸は空気の粘性率, 横軸は温度, それぞれの線は相対湿度に対応する.

- 粘性率 [11] ある温度 T_1 [K] での粘性率 η_1 が分かっているならば, 温度 T_2 [K] での粘性率 η_2 はサザランドの定数 C を用いて,

$$\eta_2 = \eta_1 \left(\frac{T_1[K] + C}{T_2[K] + C} \right) \cdot \left(\frac{T_2[K]}{T_1[K]} \right)^{3/2} \quad (40)$$

と記述されます. 空気の場合, $C = 117$ です [11]. 粘性率は圧力にはほとんど無関係です. 空気の場合, 1 気圧, 気温 20 度における乾燥空気の密度 18.2×10^{-6} [Pa · s] より求められます.

詳しくは見ていませんが, 常温付近ではどうやら湿度の依存性もほとんどなさそうです [16] (Fig. 3 参照).

Reference

- [1] Eric Loth, John Tyler Daspit, Michael Jeong, Takayuki Nagata, and Taku Nonomura "Supersonic and Hypersonic Drag Coefficients for a Sphere", AIAA Journal, Vol. 59, No. 8, 2021, pp. 3261—3274.
- [2] "平均自由行程 mean free path, aerosolpedia エアロゾルペディア", <https://sites.google.com/site/aerosolpedia/yong-yurisuto/dong-li-xue/9>
- [3] "水・空気の物性 密度 粘度 動粘度" <https://mterm-pro.com/viscosity/>
- [4] F. A. Morrison, "Data Correlation for Drag Coefficient for Sphere", <https://pages.mtu.edu/~fmorriso/DataCorrelationForSphereDrag2016.pdf>
- [5] Clift, R., and Gauvin, W. H., "The Motion of Entrained Particles in Gas Streams," Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 49, No. 4, Aug. 1971, pp. 439—448.
- [6] 関 眞佐子著, 『初心者のための流体力学』, 日本バイオロロジ学会誌 (B&R) 第11巻1号 p. 22-32 (1997) https://www.jstage.jst.go.jp/article/jpnbr1987/11/1/11_22/_article/-char/ja/
- [7] I B Amarskaja, V S Belousov and P S Filippov, *Analytical calculation of adiabatic processes in real gases.*, Journal of Physics: Conference Series. **754**. 112003. 10.1088/1742-6596/754/11/112003. (2016) <http://iopscience.iop.org/1742-6596/754/11/112003>
- [8] 国立天文台編『理科年表 平成 21 年 第 82 冊』丸善株式会社 (2009) p.376
- [9] 国立天文台編『理科年表 平成 21 年 第 82 冊』丸善株式会社 (2009) p420
- [10] 相対湿度の月別平年値 -理科年表オフィシャルサイト
- [11] 国立天文台編『理科年表 平成 21 年 第 82 冊』丸善株式会社 (2009) p.378
- [12] 伊東敏雄著, 『な—るほど! の熱学』, 学術図書出版社 (1995) p. 33
- [13] "Air - Speed of Sound vs. Temperature", The Engineering ToolBox, https://www.engineeringtoolbox.com/air-speed-sound-d_603.html
- [14] "Speed of sound", wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound

- [15] 湿度 wikipedia <https://ja.wikipedia.org/wiki/%E6%B9%BF%E5%BA%A6>
- [16] M. Boukhriss et al., *Study of thermophysical properties of a solar desalination system using solar energy*, Desalination and Water Treatment 51 (2013) 1290—1295